第 7 回和田杯

灘校数学研究部

第 75 回文化祭 (2021 年 6 月 26 日〜27 日)

入試模試の数学版として発足したこの企画も 7 回目となり, 恒例企画となりつつあります. 制限時間は文化祭が終わるまでの 2 日間, じっくり考え抜いていただけると幸いです. 問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ. 答案を書いてくださった方は, 受付までお持ちいただくか, 裏面記載の Twitter アカウントに答案の写真を送っていただければ正誤判定いたします.
注意：問題の並び順は難易度とは無関係です！

1. 平行四辺形 $ABCD$ があり辺 AB の中点を M とする.点 C から直線 AD へ下ろした垂線の足を E,点 D から直線 CM へ下ろした垂線の足を F とする. また点 G を点 C が線分 FG の中点となるようにとり,直線 CE と直線 DF の交点を H,線分 DG の中点を N とするとき直線 BN と直線 GH が垂直に交わることを示せ.

2. 正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって,任意の正の実数 x, y に対して

$$f(x+y) = f(yf(x))$$

が成り立つものを全て求めよ.

3. 縦横 2021 マスのマス目に 0 または 1 を書き込む. 0 が書き込まれたマス目に対しそのマスと辺または頂点を共有するマス (最大 8 個) に書き込まれた数字の合計をそのマスの得点と呼ぶことにする. 縦横 2021 マスのマス目に含まれ 0 と書き込まれたマス目全体の得点の総和の最大値を求めよ.

4.　四角形 $ABCD$ が点 O を中心とする円に内接し, 直線 AB と直線 CD は点 P で, 直線 AD と直線 BC は点 Q で, 直線 AC と直線 BD は点 R で交わり, 点 D が点 C と点 P の間にあり, 点 B が点 C と点 Q の間にあるとする. 三角形 PQR の外接円と直線 AB, 直線 BC, 直線 CD, 直線 DA の交点をそれぞれ E, F, G, H とし, 直線 EF と直線 GH の交点を X, 直線 EH と直線 FG の交点を Y とする. 4 点 O, R, X, Y が同一円周上にあることを示せ.

5. x, y, z を実数, k を実数定数とする. $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合 とし,

$$0 < x \leqq y \leqq z \leqq x + k \text{ かつ } x + y + z \in \mathbb{Z} \text{ かつ} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y = z$$

が成り立つとき k の取りうる最大の値を求めよ.

6.　太郎君と次郎君は次のようなやりとりを行う. まず太郎君が $\{1, 2, 3, ..., 2021\}$ の部分集合 S を一つ定める.(次郎君は S を知らないものとする.) 次に太郎君と次郎君は以下の操作を n 回繰り返す.

・まず次郎君が $\{1, 2, 3, ..., 2021\}$ の部分集合 A を選びそれを太郎君に伝え, それを聞いた太郎君が A と S の共通部分の要素の個数を次郎君に伝える.

操作を n 回行った後, 次郎君が必ず S を 1 つに特定できるような n の最小値を求めよ.

7.　50 個の島があり, 1 つの島から他の 1 つの島へ向かう直行便を 2021 本開設する. このときどのように直行便を開設しても次の条件を満たすように島を k 個選ぶことができる.

・k 個の島からどのように相異なる 2 島 A, B を選んでも A から B への直行便を乗り継いで移動できる.

k として考えうる最大の値を求めよ. ただしどのように 2 島 A, B を選んでも A から B への直行便は高々 1 本であり, A から B への直行便が存在しても B から A への直行便が存在するとは限らない.

8. 正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって, 任意の正の実数 x, y に対して

$$\frac{yf(x)+x+1}{f(x)f(y)}$$

が整数となるものを全て求めよ.

9. 鋭角三角形 ABC の内部に異なる 2 点 P, Q が存在し, $\angle ABP = \angle CBQ, \angle ACP = \angle BCQ$ が成り立っている.(P, Q は三角形 ABC の等角共役点である.)P, Q から辺 BC に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E とする. 線分 AP を直径にもつ円と三角形 ABC の外接円が A と異なる点 F で交わり, 線分 AQ を直径にもつ円と三角形 ABC の外接円が A と異なる点 G で交わった. このとき 4 点 D, E, F, G が同一円周上にあることを示せ.

10. 2021 より大きい素数 p に対し

$$1^{2021}{}_{n+1}\mathrm{P}_n + 2^{2021}{}_{n+2}\mathrm{P}_n + \cdots + (p-n-1)^{2021}{}_{p-1}\mathrm{P}_n$$

が p の倍数でないような正の整数 n の内最小のものを求めよ. ただし正の整数 n, r に対し ${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ とする.

11. 次の式の収束性を判定し, 収束するならばその値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{0\leqq a,b\leqq n \quad a,b\in\mathbb{Z}}\sqrt{a^2+b^2}(n-a)(n-b)$$

12. 次の値を求めよ. ただし, ネイピア数 e, 円周率π, オイラー定数γ以外の数学定数を使うことはないと保障しておく.$0^0 = 1$ と定める. $\exp(\alpha) = e^\alpha$と表す.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{2n}\cdot n^2!}\prod_{k=0}^{n}[k^{4k}\cdot\exp\{\frac{2(-1)^{k+1}}{k+4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+2}}\}]$$

作問者 (協力ありがとう!

1. 秋山 2. 秋山 3. 小林 4. 小林 5. 秋山 6. 小林 7. 秋山 8. 秋山 9. 小林 10. 小林 11. 安部 12. 安部

生徒時代に数研に在籍していらっしゃった和田孫博校長先生のお名前を冠して始まった本企画も, 今年で 7 回目を迎えることとなりました. 当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが, 今となっては入試模試と張り合える有名企画になりつつあるかなと思います.

さて一昨年この企画を担当された平山先輩が卒業され, わたくし小林が引き継ぐこととなりました. 昨年は新型コロナウイルスによって文化祭が中止となり, 企画の存続が危ぶまれましたが, 何とか今年も無事続けることができました. 今後の企画の存続を切に願います.

答案の正誤判定については 1 ページ目にお書きした通りですが, 今回の和田杯もオンラインでの参加を受け付けております. 特に Twitter 上では例年たくさんの方々に解いていただいており, こちらも非常にありがたい限りです. 文化祭に来場できないという皆様も是非ご参加ください. 一人でも多くの皆様のご参加を心待ちにしています.

それでは！ Good Luck！

• 答案郵送先 (返信用の切手を同封してください)：

〒658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部

• 数研メールアドレス：nada.math.club@gmail.com

• Twitter アカウント：@nada mathclub

• 数研 HP：http://nada-mathclub.jimbo.com

文責 高校 3 年 小林晃一良