Euler関数とFermat素数　改

高校3年2組 1番　天野 丞

0. はじめに

本日は第70回灘校文化祭にお越しいただきありがとうございます。
去年書いたことに誤りがあることに気付き、
今年は、去年テキトーな処理をしてしまったことを反省しつつ、
そのことについて新たに分かったことなどを、少しですが書きたいと思います。

1. 重大な誤りについて

去年、自分は主に正の整数 n について φ を Euler 関数として、
$n - 2\varphi(n) = -1$ の解が 3, 15, 255, 65535, 4294967295
しかないことを予想し、それを示そうとしました。
しかし、他にも 83623935 という解が存在しており、その存在を見落していました。
しかもこの解は、「解は全て Fermat 素数の積となっている」という予想に合わないものでした。
ここから、他にも予想と合致しないものがあるのではないかと思い、調べてみました。

2. 去年得られたことのまとめ

① $n - 2\varphi(n) = -1$ の解の一部として、
$n = 3, 15, 255, 65535, 4294967295$

② n は相異なる素数の積で表される

①については、得られた過程はどうであれ、
代入すれば正しいことは分かるでしょう。
②は自明ではないにしろ難しいことでもないので、
よくわからないなあと思えば去年の部誌をみてください。

また、以下では $n - 2\varphi(n) = -1$ をみたす n のことを
"条件をみたす n" と表記することにする。

3．計算

前ページの ①，② から，解をみつけていきたいと思います．

(1) 正の整数 n が条件をみたすものとし，

n と互いに素な，ある素数 p で，pn が条件をみたすと仮定すると

$$\begin{aligned} pn - 2\varphi(pn) &= pn - 2\varphi(p)\varphi(n) \\ &= pn - (p-1)\,2\varphi(n) \\ &= pn - (p-1)(n+1) \\ &= n - p + 1 \end{aligned}$$

より，$n - p + 1 = -1$　つまり，$p = n+2$．

故に，条件をみたす n について，$n+2$ が素数なら $n(n+2)$ も条件をみたす．

(2) 正の整数 n が条件をみたすものとし，

n と互いに素な，ある素数 p，q で，pqn が条件をみたすとする．

$$\begin{aligned} pqn - 2\varphi(pqn) &= pqn - 2\varphi(p)\varphi(q)\varphi(n) \\ &= pqn - (p-1)(q-1)\,2\varphi(n) \\ &= pqn - (p-1)(q-1)(n+1) \\ &= (n+1)(p+q-1) - pq \end{aligned}$$

より，$(n+1)(p+q-1) - pq = -1$．つまり，$pq = (n+1)(p+q) - n$

いま，$p' = p - (n+1)$　$q' = q - (n+1)$ とおけば

$$\begin{aligned} p'q' &= (n+1)^2 - (p+q)(n+1) + pq \\ &= (n+1)^2 - (p+q)(n+1) + (n+1)(p+q) - n \\ &= n^2 + n + 1． \end{aligned}$$

つまり，条件をみたす n について，

$n^2 + n + 1$ を素因数分解して得られる p'，q' に対し，

$p' + (n+1)$，$q' + (n+1)$ が素数ならば，それらを p，q とおき，

pqn も条件をみたす．

(3) 正の整数 n が条件をみたすものとし、
n と互いに素な素数 p, q, r で、$pqrn$ も条件をみたすときの
pqr の具体的な求め方は求めることができませんでした。
締め切りを過ぎてなお時間をくれた人たちには
申し訳ない気持ちでいっぱいです。

4. 具体的な解について

(1) と (2) の結果から、解を求めています。
$n = 3$ が解であることが分かっていれば、
(1) を使うことで、$n = 15$、255、65535、4294967295
は解に含まれることがわかる。
また、$4294967295 \times 4294967297$ が条件をみたさないことは
$4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解できるという
有名な事実から明らかですね。Euler はすごい人です。

(2) は少し計算が面倒で、少ししか終わっていません。

ア) $n = 3$
$p = 5$, $q = 17$ (かんたんなので略)

イ) $n = 15$
$p = 17$ $q = 257$ (同上)

ウ) $n = 255$

$$n^2 + n + 1 = 65281 = 97 \times 673$$
$$= 1 \times 65281$$

で、$97 + 256 = 253$、$673 + 256 = 929$ は素数。
また、$1 + 256 = 257$、$65281 + 256 = 65537$ は素数。
故に、$255 \cdot 353 \cdot 929 = 83623935$
$255 \cdot 257 \cdot 65537 = 4294967295$ は解に含まれる。
これを書くきっかけとなった 83623935 が求められました！
ところで、83623937 は素数なので、(1) を用いると
83923935×83623937 も条件をみたします。

(エ) $n = 65535$
これより大きい数については計算ができませんでした。

去年より、より少ない計算量で去年よりも多くの解を求められました。

5. おまけ.

少しだけ一般化してみました.

$n - a\varphi(n) = -1 \quad (a \in \mathbb{Z}^+)$ だと解がたくさんありそうで.
さらに, n の素因数分解を考えたときに, どこかで指数が1でなくなる可能性まででてきてつらいので.

$(a-1)n - a\varphi(n) = -1 \quad (a \in \mathbb{Z}^+)$ について
少し考えました. 分かったことを少し書くと.

① a は偶数

② $a=6$ のとき $n=7,\ 7\times37,\ 7\times37\times1297$ は条件をみたす.

具体的な解の求めかたとして.
(1) は $(a-1)n+2$ が素数になるとき $n((a-1)n+2)$ も条件をみたし.
また (2) については, $p' = p - ((a-1)n+1)$
$q' = q - ((a-1)n+1)$ として.
$p'q' = ((a-1)n+1)^2 - ((a-1)n+1) + 1$ を素因数分解します.

なんだか大して結果が出ていませんが, これで締めたいと思います.

6. おわりに.

終わりました. 自分の書く最後の部誌だと思うと, こんな中途半端なものを出すのは悲しいけれども, それが自分なのかなあと自虐的に言ってみます.
結局中高で学んできたことのほとんどは部誌に書けるレベルまで膨ませることができず(これもかなり微妙なものですが),
もっと精神しないとなあという気分です. 締め切り以内に書ける人.
自分が勉強してきたことをちゃんと書ける人達には尊敬の念でいっぱいです.
よくわからないこと, まちがったことなどあれば, 数研のアドレスまでお願いします. (おそらくほかの人が書いているはず)
または, Twitter のアカウント @nada_mathclub まで, どうぞ.
↑アンダーバーが1本です.

拙い字で, 最後まで TeX を習得できませんでしたが,
読んでくださりありがとうございました.
それでは引き続き第70回灘校文化祭をお楽しみください.

7. 参考文献

素数表150000個 (暗黒通信団)

ぼくのといてみたしゅう

高校 3 年 3 組 17 番 藏田力丸

1 はじめに

本日は灘校文化祭にお越しいただきありがとうございます. ” 解いてみた集” とは, 日本数学オリンピック (JMO) 本選で入賞し, 春合宿 (国際数学オリンピック (IMO) 日本代表選抜合宿) 参加が決まった生徒に数学オリンピック財団から配布される冊子で, その年度に行われた各種コンテストの問題をチューター (過去一回以上 IMO に参加した経験のある, いわば数オリ OB) が解き, その思考過程などを記したものです. 本稿は, 競技数学に捧げてきたともいえる僕の中学・高校生活の総括として, 自分が過去に解いた問題から選んで” 解いてみた集” を作成しようと思い, 書いたものです. 各問題を解いた当時, どのようなことを考えながら解いたかを記しています.

したがって, 他の記事よりも軽い読み物感覚で読んでいただけるかと思います. また, 収録した問題だけを最初にまとめてあるので, 問題を先に解いて, そのあとで後の解説を読む, という読み方もしていただけます.

また本稿には, 将来 JMO で入賞するんだ, IMO に行くんだ, という意志を持つ本校の後輩, あるいは日本全国の方々への手助けとなれば, という思いも込めています. とはいえ自分はそんなに偉そうなことを言える立場ではなく, 3 回も代表選抜で落ち, ようやく今年初めての IMO に参加させていただくことがつい先日決まった[*1]身なのですが, それでも人よりはだいぶ長く競技数学をやっていましたし, 何か参考になる部分もあるのでは, と思います.

収録問題の選考基準ですが, おおよそ次のいずれかを満たす問題を選んでいます.

- 好きな問題
- 思い出深い問題
- 応用範囲の広いエッセンスを含んだ問題
- 模範解答と異なる解法で解いた問題

競技数学などという無価値なものに尽力するなんて愚かだ, 学問としての数学に比べて何

*1 2016 年 4 月現在

の意味も持たない, などと批判される方もいらっしゃるでしょう. そういった方は本稿は読まずに飛ばしていただいて構いません. しかし競技数学は, 例え学問としての数学には無関係であったとしても, 中高生活を捧げられるくらい奥深いものであるということはわかっていただきたい限りです.

2 問題編

1. 次の方程式を整数の範囲で解け. (USAMO 2015 1)

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3$$

2. x グラムの牛乳と y グラムの紅茶が入っているカップが**良いミルクティー**であるとは, $y > 0$ かつ$\dfrac{y}{x+y} > \dfrac{3}{5}$であることとする.

   いま, 空のカップが 3 個ある. A 君と B 君は, A 君を先手として次の操作を交互に行う.

   - A 君の操作:いくつかのカップに合計 60 グラムの牛乳を注ぐ.
   - B 君の操作:いくつかのカップに合計 60 グラムの紅茶を注いだのち, 3 個のうち 1 個のカップを選び, その中身を空にする.

   B 君の目標は, 2 個のカップを同時に良いミルクティーにすることである. B 君の行動にかかわらず, A 君は B 君の目標を阻止し続けることができるか. (JJMO 2013 2)

3. 正整数 a について, 整数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を次で定める.

   - $x_1 = a$
   - $x_{n+1} = 2x_n + 1$

   また, $y_n = 2^{x_n} - 1$ とする. ある a について $y_1,\ \cdots,\ y_k$がすべて素数となるような k のうち最大のものを求めよ. (RMM 2013 1)

4. $a,\ b$ を正の整数とし, $A,\ B$ はともに有限個の整数からなる集合で, 以下の 2 つの条件をみたすものとする :

   - A と B は共通部分を持たない.
   - 整数 i が A または B に含まれるなら, $i + a$ が A に含まれるまたは $i - b$ が B に含まれる.

   このとき, $a|A| = b|B|$ であることを示せ. ただし, $|X|$ で集合 X の元の個数を表すものとする. (APMO 2013 4)

5.　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，任意の実数 x, y に対して

$$xf(xy) + xyf(x) \geqq f(x^2)f(y) + x^2y$$

が成り立つようなものをすべて求めよ. (MEMO Team Competition 2014 2)

6.　三角形 ABC の外心を O, 内心を I とおく. 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F があり，$BD + BF = CA$, $CD + CE = AB$ をみたしている. 三角形 BFD の外接円と三角形 CDE の外接円が D でない点 P で交わっているとき, $OP = OI$ を示せ. (IMO Shortlist 2012 G6)

7.　$n \times n$ のマス目からいくつかのマスを選び，集合を作る. このようにしてできる集合が**便利**とは，マス目の各行および列について，少なくとも 2 マス以上が集合に含まれることをいう. $n \geqq 5$ なる各整数 n について，次をみたすマスの集合 C が存在するような最大の m を求めよ. (IZhO 2012 2)

- C には m 個のマスが属している.
- C は便利な集合であるが，どのマスが C から除外されても，C は便利な集合でなくなる.

8.　鋭角三角形 ABC は $AB > AC$ をみたしている. 三角形 ABC の外接円をΓ, 垂心を H, A から対辺に下ろした垂線の足を F とおく. また, 辺 BC の中点を M とおく. 点 Q をΓ上の点で$\angle HQA = 90°$をみたすものとし，点 K をΓ上の点で$\angle HKQ = 90°$をみたすものとする. A, B, C, K, Q は相異なる点であり，この順にΓ上にあるとする. このとき，三角形 KQH の外接円と三角形 FKM の外接円は互いに接することを示せ. (IMO 2015 3)

9.　f と g を，正整数に対して定義され正整数値をとる関数とする. 任意の正整数 n に対して

$$f(g(n)) = f(n) + 1,\quad g(f(n)) = g(n) + 1$$

が成り立つとき，全ての正整数 n に対して $f(n) = g(n)$ となることを示せ. (IMO Shortlist 2010 A6)

10.　鋭角三角形 ABC がある. 辺 AC 上の点 E と辺 AB 上の点 F の組 $(E,\ F)$ が以下の条件をみたすとき **面白い** 組であるという:

線分 EF の中点を M, 線分 EF の垂直二等分線と直線 BC の交点を K とし,
線分 MK の垂直二等分線と直線 AC, AB の交点をそれぞれ S, T としたとき,
4 点 K, S, A, T は同一円周上にある.

2 つの組 $(E_1,\ F_1)$, $(E_2,\ F_2)$ がいずれも面白いとき, $\dfrac{E_1E_2}{AB}=\dfrac{F_1F_2}{AC}$ が成り立つことを示せ.

ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする. (IMO Shortlist 2014 G6)

3 USAMO 2015 1

次の方程式を整数の範囲で解け.

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{x+y}{3}+1\right)^3$$

言うて 1 番やし簡単っしょw左 2 次右 3 次やし適当に不等式評価で潰せるwくらいのノリで挑む. しかし, どうせ相加相乗やーんwとか思いながらも何も進まない. 正整数じゃなくて整数範囲なのが厄介だなぁ $\cdots$ と思いながら, 絶対値取ったりあれこれやっても進展がない.

さんざん冷や汗を流してようやく方針転換 (時間かかりすぎ $\cdots$), どうみても $x+y$ は 3 の倍数なので, k を整数として $x+y=3k$ とおく. x について整理して $x^2-3kx-(k^3-6k^2+3k+1)=0$ とか. おっ 2 次方程式か, ふーん $\cdots$ まあ判別式でもとるか. $D=9k^2+4(k^3-6k^2+3k+1)=4k^3-15k^2+12k+4$, x が整数ってことはこれが平方数. これ因数分解できたら爆笑じゃね, ってできるやないかーい $\cdots D=(k-2)^2(4k+1)$. ここまでやってIMO Shortlist 2014にほぼ同じように判別式因数分解して解く問題あったなぁ, しかもそれアメリカが提出してたなぁと思い出す (最初から思い出しておけばよかったのに). ほぼ同じやん, アメリカは[redacted][*1], なんて考えたところで問題に戻る.

$(k-2)^2(4k+1)$ が平方数ってことは $4k+1$ も平方数, $4k+1$ は明らかに奇数だから, ある整数 l について $4k+1=(2l+1)^2 \implies k=l^2+l$. あとはさっきの 2 次方程式を解いて $x=l^3+3l^2-1,\ -l^3+3l+1$ になるから $(x,\ y)=(l^3+3l^2-1,\ -l^3+3l+1)$, $(-l^3+3l+1,\ l^3+3l^2-1)$ だけど, 後者の l を $-l-1$ にしたら前者と同じになるよね, ってことで求める答えは $(x,\ y)=(l^3+3l^2-1,\ -l^3+3l+1)(l\in\mathbb{Z})$ となる. 十分性もOK.

[*1] 部誌の品位を著しく下げかねないため黒塗りにしております

解説:因数分解ゲーの不定方程式です. 国際大会クラスではあまり見られませんが, 国内大会クラスではそれなりに見られるタイプだと思います. この手の問題では因数分解は常に疑うようにするとよいでしょう. あと, 迷ったら方針転換する勇気を持ちましょう (自戒).

おはなし:変な形の一般解が出てくるの面白いなぁと思って選びました. こういう因数分解ゲーのような IMO レベルではもうあんまり出ないよみたいなタイプは, ハイレベルな問題にばかり当たっているが故に穴になっていることがたまにあると思います. そんな自戒も込めたチョイスです.

4 JJMO 2013 2

x グラムの牛乳と y グラムの紅茶が入っているカップが**良いミルクティー**であるとは, $y > 0$ かつ$\dfrac{y}{x+y} > \dfrac{3}{5}$であることとする.

いま, 空のカップが 3 個ある. A 君と B 君は, A 君を先手として次の操作を交互に行う.

- A 君の操作:いくつかのカップに合計 60 グラムの牛乳を注ぐ.
- B 君の操作:いくつかのカップに合計 60 グラムの紅茶を注いだのち, 3 個のうち 1 個のカップを選び, その中身を空にする.

B 君の目標は, 2 個のカップを同時に良いミルクティーにすることである. B 君の行動にかかわらず, A 君は B 君の目標を阻止し続けることができるか.

後述の理由により 3 年ぶりに再考. $\dfrac{y}{x+y} > \dfrac{3}{5}$ってことはつまり $2\cdot$(紅茶) $> 3\cdot$(牛乳) か. $(20,\ 20,\ 20)$ って入れるのが A 君にとってはよさそうな気がする. 実際, 初手に関していえば, もし A 君が $(a,\ b,\ c)(\neq (20,\ 20,\ 20))$ って入れたとすると, $a \geqq b \geqq c$ とかとしたときB君は, a グラムの牛乳が入ってたカップを空にして, $b,\ c$ グラムの牛乳が入ってるカップに紅茶を各々$\dfrac{3}{2}b+\delta,\ \dfrac{3}{2}c+\delta$グラムの紅茶を入れれば勝てる (ただし$\delta$は十分小さい)($\because\ b+c<40$).

このままうまいことB 君は A君のスキをつけないかなあと思うも, 無理っぽい. てことはB君勝てないのか$\cdots$A君にもうちょっと柔軟に動いてもらおう. 考えにくいので, 次のミルクティー指数を定義する.

$$\textbf{ミルクティー指数} = (\text{紅茶量}) - \frac{3}{2}(\text{牛乳量})$$

A 君は各ターンごとに各カップの指数を計 90 下げる. B 君は 3 個のカップから 1 個を選んで指数を 0 にし, 残りの 2 個のカップの指数を計 60 以下上げる. 2 個のカップの指数を同時に正

にするのが B 君の目的.

ん? これ, A 君は自分のターンの終わりに常に指数が全て -30 以下になるようにできるんじゃね? だって B 君の各操作での 2 個のカップの指数の上げ幅は計 60 以下なんだから, A 君は常に空のカップの指数を -30 して, 残りのカップの指数も両方 -30 となるように値を下げてやると, ここまでで下げ幅は合計 90 以下 ($30+$ 直前の B 君の上げ幅の合計) なんだから, 余った下げ幅は適当に使えばいい. よって A 君は阻止できる. 終わり.

解説:ミルクティー指数を導入してから大分考えやすくなった, といったところでしょうか. ゲームの問題の必勝戦略として, 各ターンごとに何らかのパラメタの値が常に一定となるようにするのはよくあると思います.

おはなし:僕はちょうどこの年の JJMO を受験したのですが, 試験が終わった後, 「同時に良いミルクティーにする」とは「同時に良くない状態から良い状態にする」という意味なのか「同じタイミングで両方が良い状態であるようにする」という意味なのかでちょっとした論争になったのを覚えています. 結果, 出題者は前者の意味で出題していたのですが, 僕は後者の意味と勘違いして解いていたので, この問題の得点は 0 点でした (ちなみに, 後者の解釈で解いたとしても答案に不備があったようです, 結局ダメですね). 少し苦い思い出のある 1 問です.

5 RMM 2013 1

正整数 a について, 整数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を次で定める.

- $x_1=a$
- $x_{n+1}=2x_n+1$

また, $y_n=2^{x_n}-1$ とする. ある a について y$_1$, $\cdots$, y_kがすべて素数となるような k のうち最大のものを求めよ.

$2^{(hoge)}-1$ が素数って条件として割とキツくね? ちょっと実験しても $k\geqq 3$ にならなさそうだ. え, ってことは k のmaxって $2\cdots$? 疑いながら, もうちょっとちゃんとした考察に入る.

とりあえず $k=3$ で条件が成り立ったとするととすると, くらいで考えてみるか. このとき

$$x_1=a,\ x_2=2a+1,\ x_3=4a+3$$
$$y_1=2^a-1,\ y_2=2^{2a+1}-1,\ y_3=2^{4a+3}-1$$

となる. んー, とりあえず, $2^x-1:prime(=$ 素数$)$ ってことは $x:prime$ なのか, だって x の 1 よりでかくて x より小さい約数 d が存在したとしたら $2^d-1|2^x-1$ となってダメだ

からな ($p|q$ で q が p で割り切れることを意味します). $x=1$ の場合ももちろんダメってことは $a,\ 2a+1,\ 4a+3$ は全部 $prime$ か. a と $2a+1$ はどちらも $prime$, みたいな問題は見たことある. $Fermat$ の小定理使うんやったっけな. 試しに使ってみるか.

$$2a+1|2^{2a}-1=(2^a-1)(2^a+1)$$

そうか, ってことは 2^a-1 が $prime$ なのがうまく効いてきて, $2a+1=2^a-1$ or $2a+1|2^a+1$ とわかる. 前者の場合はさすがに左右のオーダーが違うから a がかなり小さい範囲に決まる. ちょっと調べて $a=3$ しかありえない. でもこのときって $4a+3=15$ って $not\ prime$ だからダメ. これって $2^{2a+1}-1$ と $4a+3$ も $prime$ だから全く同様の議論ができるなぁ. 同様にして $a=1$ or $4a+3|2^{2a+1}+1$ とわかる. $a:prime$ より前者は明らかにダメ, よって後者が成り立つ.

ここから何か言えないかなぁ. $4a+3|2^{2a+1}-1$ ってことは $2^{2a}\equiv 2a+1 \pmod{4a+3}$, はい見え見えの平方剰余ですねお疲れ様です. 相互法則やるだけ.

$$\left(\frac{2a+1}{4a+3}\right)=1,\ \left(\frac{4a+3}{2a+1}\right)=\left(\frac{1}{2a+1}\right)=1$$

$$\left(\frac{2a+1}{4a+3}\right)\left(\frac{4a+3}{2a+1}\right)=(-1)^{\frac{(4a+3)-1}{2}\cdot\frac{(2a+1)-1}{2}}=(-1)^{a(2a+1)}$$

よって $a(2a+1)$ が偶数, つまり a は偶数. $a:prime$ より $a\geqq 3$ のときはどう見てもダメだから $a=2$. でもこのときは $2^{4a+3}-1=2^{11}-1=2047=23\times 89$, はいアウト.

構成は簡単, $a=2$ としてやればＯＫ, よって求める max は 2.

解説 : p と $2p+1$ とか, p と (p の 1 次式) がともに素数, という設定はたまに見かけます. この問題では小定理で得られた式を因数分解しましたが, 位数の議論に持ち込むケースもあります. あと, 整数の未知数乗を扱う問題では常に平方剰余を疑ってかかりましょう.

おはなし : 平方剰余の手ごろな練習問題といったところでしょうか. 決して重い問題ではないですが, サクッとしたシンプルな良問といった感じで, 好きな問題です.

6 APMO 2013 4

$a,\ b$ を正の整数とし, $A,\ B$ はともに有限個の整数からなる集合で, 以下の 2 つの条件をみたすものとする :

- A と B は共通部分を持たない.
- 整数 i が A または B に含まれるなら, $i+a$ が A に含まれるまたは $i-b$ が B に含まれる.

このとき，$a|A|=b|B|$ であることを示せ．ただし，$|X|$ で集合 X の元の個数を表すものとする．

うわなんかキツそう．とりあえず，$i\in A$ かつ $i+a\notin A$ ならば $i-b\notin B$ なわけか．てことは A の最大の要素を M とかとおくと $M-b\in B$ なわけだ．こんなことをちょこちょこ考えて，A の中に公差 a の等差数列があったなら，その"はしっこ"の項，つまり最大の項について，それより b 小さい値は必ず B の要素だ，という着想を得る．このまま考えてもわけわからんし，A を公差 a の等差数列に分割して，文字でおいてしまおう．

$$\begin{gathered}X_1 : a_1,\ a_1+a,\ a_1{+}2a,\ \cdots,\ c_1\\ X_2 : a_2,\ a_2+a,\ a_2{+}2a,\ \cdots,\ c_2\\ \vdots\\ X_p : a_p,\ a_p+a,\ a_p{+}2a,\ \cdots,\ c_p\end{gathered}$$

このとき，どの 2 つの等差数列も"つながらない"，つまりどの 2 つもくっつけて 1 つの大きな等差数列にはできないとしてＯＫ．B も同様に分割する．

$$\begin{gathered}Y_1 : b_1,\ b_1+b,\ b_1{-}2b,\ \cdots,\ d_1\\ Y_2 : b_2,\ b_2+b,\ b_2{-}2b,\ \cdots,\ d_2\\ \vdots\\ Y_q : b_q,\ b_q-b,\ b_q{-}2b,\ \cdots,\ d_q\end{gathered}$$

すると，題意の条件から，任意の $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$ について $c_i-b\in B$ とわかる．あれ，でも c_i-b が B の中の等差数列の初項じゃなかったら，c_iもその等差数列に入ってしまってアウトやないかい．よって c_i-b はいずれかの等差数列の初項，つまり $c_i-b\in\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_q\}$.

$$\therefore\ \{c_1-b,\ c_2-b,\ \cdots,\ c_p-b\}\subseteq\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_q\}$$

全く同様にして

$$\{d_1+a,\ d_2+a,\ \cdots,\ d_q+a\}\subseteq\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_p\}$$

とわかる．えっと，だからこれがこれに含まれていて $\cdots$ とか言いながら条件をジェスチャーで表現したりあれこれする．あれ，要素数比べたら $p\leqq q$ かつ $q\leqq p$，ってことは $p=q$ しかありえないじゃない．ってことは，2 式はどっちも等号成立．つまり

$$\{c_1-b,\ c_2-b,\ \cdots,\ c_p-b\}=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_q\}$$

$$\{d_1+a,\ d_2+a,\ \cdots,\ d_q+a\}=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_p\}$$

となる. うーん, 示したいことに戻ろう,

$$\begin{aligned}
a|A|=b|B| &\Longleftrightarrow a\sum_{i=1}^{p}|X_i|=b\sum_{i=1}^{q}|Y_i| \\
&\Longleftrightarrow a\sum_{i=1}^{p}(\frac{1}{a}(c_i-a_i)+1)=b\sum_{i=1}^{q}(\frac{1}{b}(b_i-d_i)+1) \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p}(c_i-a_i+a)=\sum_{i=1}^{q}(b_i-d_i+b) \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p}c_i-\sum_{i=1}^{p}a_i+pa=\sum_{i=1}^{q}b_i-\sum_{i=1}^{q}d_i+qb
\end{aligned}$$

む, これってさっきの集合の等式で総和取ったら言えそうじゃね?

$$\sum_{i=1}^{p}(c_i-b)=\sum_{i=1}^{q}b_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p}c_i-pb=\sum_{i=1}^{q}b_i$$
$$\sum_{i=1}^{q}(d_i+a)=\sum_{i=1}^{p}a_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{q}d_i-qa=\sum_{i=1}^{p}a_i$$

予想通り. 辺々足し合わせて整理して, $p=q$ を用いればさっきの式が得られる.

解説：条件が〜あるいは〜の形なので, そのまま扱おうとすると少し面倒です. そこで, 等差数列をとってしまうことで片側が成り立つ可能性を排除しました. こうすると, 面白いように各文字に関しての式が得られ, 示すべきことが得られます. それから, 最初に「うわなんかキツそう」とありますが, 問題に対してネガティブな印象をを持ったまま解き始めると, 解ける問題であっても解けなくなってしまうことが多いです.「どうせ簡単w」くらいの意気で臨みましょう.

おはなし：公式解答が 2 つあったのに 2 つともスマートで (いやかっこよすぎやないかい$\cdots$) と思ったのを覚えています (集合 $\{n-a|n\in A\}$ と $\{n+b|n\in B\}$ を考えるものと, グラフに対応させるもの). でも, こういう泥臭い方法でも解けますよ〜, ということで収録しました. 確かこの年のAPMOで, 日本人のトップ 10 人は全員この問題で 7 点満点を得ていてとても驚いた記憶があります,

7 MEMO Team Competition 2014 2

実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，任意の実数 $x,\ y$ に対して

$$xf(xy)+xyf(x) \geqq f(x^2)f(y)+x^2y$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

おっ関数不等式，どうせ等号は常に成り立つんだろ～解は $f(x) = x$ だな～w(注：**違います**) とか言いながら解き始める．与式を $P(x,\ y)$ とおいてスタート．

まずは 0 代入，$P(0,\ 0) \Longrightarrow 0 \geqq f(0)^2 \Longrightarrow f(0)=0$. やったね．でも $x,\ y$ に 0 を代入しても成果なし．かなしいなぁ．次は f の中身を同じにする代入．$x=1$ とか良さそうやない?

$$P(1,\ y) \Longrightarrow f(y)+f(1)y \geqq f(1)f(y)+y \Longrightarrow (1-f(1))(f(y)-y) \geqq 0$$

ええ感じやん．$y=1$ として $0 \geqq (f(1)-1)^2 \Longrightarrow f(1)=1$. ありゃ，さっきの式が意味を失ってしまった．まあいいや，

今度は y に 1 を代入してみよう．

$$P(x,\ 1) \Longrightarrow xf(x)+xf(x) \geqq f(x^2)f(1)+x^2 \Longrightarrow 2xf(x) \geqq f(x^2)+x^2$$

$f(x^2)$ 邪魔すぎ$\cdots$ $f(x^2)$ $\geqq$(hoge)みたいな不等式欲しいな．y に x ぶち込んだら良さげじゃね．

$$P(x,\ x) \Longrightarrow xf(x^2)+x^2f(x) \geqq f(x^2)f(x)+x^3 \Longrightarrow (f(x^2)-x^2)(x-f(x)) \geqq 0$$

ふむふむ，$g(x)=f(x)-x$ とすると $g(x)$ と $g(x^2)$ の符号が逆ってことか．てことは，仮に何らかの a について $a>f(a)$ となったとすると，$f(a^2) \geqq a^2$となるわけか．$a>0$ って制約かけたらさっきの式使えるやんけ!

$$2a^2 > 2af(a) \geqq f(a^2)+a^2 \geqq 2a^2$$

はい矛盾，やったぜ．つまり，全ての非負実数 x について $f(x) \geqq x$ とわかる．ってことは $g(x) \geqq 0$，これってさっきの符号が逆になる話と合わせたら $g(x)=0$ とかいえそうじゃね? つまり，任意の非負実数 x について $g(x) \geqq 0$，自明に $x^2 \geqq 0$ より $g(x^2) \geqq 0$. よって，さっきのと合わせて $g(x)g(x^2)=0$ とわかる．.

ところで $f(x^2)$ って上からも評価できてたよな$\cdots$ $2xf(x) \geqq f(x^2)+x^2$か，ってことはもし $g(x)=0$ だったならば

$$2x^2 = 2xf(x) \geqq f(x^2)+x^2 \Longrightarrow x^2 \geqq f(x^2) \Longrightarrow 0 \geqq g(x^2)$$

となる. はい勝ち, $g(x^2) \geqq 0$ はわかっているので $g(x^2)=0$, つまり $f(x^2)=0$ とわかる. x が任意の非負実数値を取りうるとき x^2 も任意の非負実数値を取りうるので, 全ての非負実数 x について $f(x)=x$ と言えた.

あらかた行けるとこまで行ったので, 元の式に戻ると, $f(x^2)$ の値がunlockされている (ゲームみたいだ).

$$P(x,\ y) \Longrightarrow xf(xy)+xyf(x) \geqq x^2f(y)+x^2y$$

となる. 情報が足りない$\cdots$そうか, f(負の値) がわかればいいんだから, $x,\ y<0$ としていいのか. こうすると何がうれしいかというと, $xy>0$ なので $f(xy)=xy$ となる. つまり

$$xf(xy)+xyf(x) \geqq x^2f(y)+x^2y \Longrightarrow x^2y+xyf(x) \geqq x^2f(y)+x^2y \Longrightarrow xf(y) \geqq yf(x)$$

とわかる. おっ x と y に関して対称っぽい式, こういう時は x と y をひっくり返す, 典型. $yf(x) \geqq xf(y)$ となり, 元の式とちょうど不等号の向きが逆の式が得られた. したがって両者の等号は成立. すなわち, 任意の負実数 $x,\ y$ について $xf(y)=yf(x)$ となる. はいこれはもう f 線形だね知ってます, y に -1 を代入して, 任意の負実数 x について $xf(-1)=-f(x) \Longrightarrow f(x)=cx$ となる (c は定数, $-f(-1)=c$).

あとは c についての情報が得られれば勝ちだ. だいぶ情報が出揃ってるし素直に元の式と照らし合わせば良さそう, x と y が同符号の時はどう考えても等号が成立. 異符号の時を考えよう.

- $x \geqq 0 > y$ のとき : $P(x,\ y) \Longleftrightarrow cx^2y+x^2y \geqq cx^2y+x^2y$. これはちゃんと成立. OK.
- $y \geqq 0 > x$ のとき : $P(x,\ y) \Longleftrightarrow cx^2y+cx^2y \geqq x^2y+x^2y \Longleftrightarrow 2(c-1)x^2y \geqq 0$. これが $y \geqq 0 > x$ なる任意の $x,\ y$ について成り立つってことは $c \geqq 1$ と同値.

以上より, 求める解は

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ cx & (x<0) \end{cases} \quad (c \text{ は } 1 \text{ 以上の実数})$$

とわかる. 十分性はこれまでの議論で保証されてるよね.

解説 : 0 代入, f の中身を揃える代入, xy を入れ替える, 必要に応じて元の式に立ち返って整理等々, FE を解く際の基本精神のエッセンスが詰まった良問だと思います. FE は扱う条件が多くなるとつい闇雲に式変形したり代入したりしがちになりますが, 自分が今何をしていて何がしたいのか考えながら落ち着いて解き進めると良いでしょう.

おはなし : 前述のとおり良問だと思ったので収録しました. 関数不等式はこれから増えてくるような気がします. また, 上記では触れませんでしたがはじめの予想は結局間違ってましたね.FE における解の予想は大事ですが, あまりとらわれすぎないのも大事だと思います.

8 IMO Shortlist 2012 G6

三角形 ABC の外心を O, 内心を I とおく. 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F があり, $BD+BF=CA$, $CD+CE=AB$ をみたしている. 三角形 BFD の外接円と三角形 CDE の外接円が D でない点 P で交わっているとき, $OP=OI$ を示せ.

条件キモ, と思ったけど $AE+AF=BC$ がわかるから一応 A, B, C に対しては対称なのか. 残念ながら計算は厳しそう $\cdots$ 泣く泣く初等を迫られる. 長さの条件いまいちピンと来ない, しばし悩む.

内心か, 内接円の接点 $\cdots$ は条件を満たさない. あっ傍接円の接点 $\cdots$ いける, 条件を満たすぞ. つまり, 三角形 ABC の 3 つの傍接円の BC, CA, AB での接点を D_1, E_1, F_1とすると, これらは各々 D, E, F として条件を満たす. このとき P ってどんな点なんやろ. きれいに作図すると, このときの P はどうも O, I と共線っぽい. ってことは, 題意が正しいなら P は I の O に関する対称点になるけど $\cdots$ そうか! I の O に関する対称点を X とすると, 三角形 ABC の内接円の BC, CA, AB での接点を D', E', F'としたとき D'と D_1 は BC の中点に関して対称なので $XD_1\perp BC$. 同様に $EX_1\perp CA$, $XF_1\perp AB$ から, なるほど確かに BF_1XD_1, CD_1XE_1は共円で X は題意の P となり, 題意は成り立つ.

せっかくなのでこの X とか D_1, E_1, F_1を使っていきたい. 一般の D, E, F とこれらの関係を調べよう. まず辺の条件は $DD_1=EE_1=FF_1$と昇華できる. 条件としての絶望感は少し減った. このまま 2 円を描いて P を作図するも, まだあまりよくわからん. さっきの垂直条件を踏襲して, D, E, F を通り BC, CA, AB に垂直な直線を引いてみる. 三角形ができた. ん, この三角形の 3 辺は三角形 ABC の各辺に垂直だから, ABC と相似か. あれれ, X ってこの三角形の外心か? (注：**大嘘です**) 議論しやすいように点に名前を付けよう. E, F を通り CA, AB に垂直な直線の交点を A_2とし, B_2, C_2も同じように定める. XA_1の長さから考えるか. XA_2を CA, AB 上に正射影してできる線分が各々 EE_1, FF_1で等しい. なるほど, ってことは XA_2と AB のなす角は $90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$. よって, $EE_1=k$ とすると $XA_2=\dfrac{k}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$ とわかる. ありゃりゃ, 外心じゃねえな. ん? じゃあなんだろう, 内心とか? そうか, 三角形 ABC の内接円の半径を r とすると $\sin\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{r}{AI}$だから $XA_2=\dfrac{k}{r}AI$, 同様にして $XB_2=\dfrac{k}{r}BI$, $XC_2=\dfrac{k}{r}CI$ となるから X は三角形 $A_2B_2C_2$の内心と言えた.

でもこれどうやって使うんだろ $\cdots$ しばらく思考停止. ふとひらめく. 相似があったら相似中心をとれってどこかで頭に入れたな $\cdots$ 三角形 ABC と $A_2B_2C_2$の相似中心をとってみよう. S とおいた. 回転角って 90°か, だって XA_2を CA, AB 上に正射影したら等長な線分になるから, $AI\perp XA_2$になるんだもんな. ってことは, $\angle ASA_2=90^\circ$か $\cdots$ ん!? ってこと

は A, E, S, F って共円やんけ! 同様に B, F, S, D と C, D, S, E も共円, ってことは S は題意の P に一致する.

ここまでくれば勝利は確実. この三角形 ABC と $A_2B_2C_2$の相似において I と X はともに内心で対応するんだから$\angle IPX = 90°$, したがって, O は IX の中点より $OP = OI$ と言えた.

解説：D_1, E_1, F_1に気づけるかどうかで大きく明暗が分かれるのではないでしょうか. このように, 題意の条件が満たされる特殊なパターンを考えて, 条件が満たされる一般の場合と比較する議論は, 特に幾何の問題で時折見かけます. また, 相似な三角形が 2 つある時に相似中心をとる議論もたまに見受けられます.

おはなし：この問題は, 僕が最初に春合宿に参加した時の代表選抜試験の第 3 問で (これはつい最近解きなおした時の様子です), まだ生意気な中学生だったころを思い出させてくれます. また, それとは別に, 一見どこから手を付ければいいかわからないような意味不明な条件からきれいな結果が得られるという点で, とても面白いと思います. 2 つの意味で好きな一問です. 余談ですが, 上記のように解き終わった後に公式解答を読んだのですが全く方針が違っていて (公式解答はもっとエキセントリックでした), 別解を見つけたとよろこんでいたのですが, 海外の数学掲示板をのぞくと既にpostingされていてとてもがっかりしました.

9 IZhO 2012 2

$n \times n$ のマス目からいくつかのマスを選び, 集合を作る. このようにしてできる集合が**便利**とは, マス目の各行および列について, 少なくとも 2 マス以上が集合に含まれることをいう. $n \geqq 5$ なる各整数 n について, 次をみたすマスの集合 C が存在するような最大の m を求めよ.

- C には m 個のマスが属している.
- C は便利な集合であるが, どのマスが C から除外されても, C は便利な集合でなくなる.

いや $convenient$ ってなんやねん (原題では″便利″は″$convenient$″でした). センスなさすぎ. とまあそんなことは置いておく. 要はマス目を選ぶってことか. 選ぶマスを黒く塗りつぶすことにした. 各行, 列について 2 マス以上が黒のマスで, どの黒のマスを白くしても, どこかの行か列が, 黒いマスを高々 1 つしか持たない状態になる. ってことは, これってつまり任意の黒いマスについて, そのマスを含む行か列のどちらかは, 黒いマスをちょうど 2 個含む, ってことと同値. ふむふむ, わかったようなわからんような条件だ$\cdots$実験してみるとどう

も m の max は $4n-8$ とからしい. 左から 1, 2 列目の上から $n-2$ 個ずつと, 下から 1, 2 行目の右から $n-2$ 個ずつを選んだ場合. ううーん, どうアプローチすればいいかわからん.

そうだ, マス目をグラフに対応させるみたいな手法あったな, 試してみるか. どう対応させるかというと, $2n$ 個の頂点 A_1, A_2, $\cdots$, A_n と B_1, B_2, $\cdots$, B_nをとって, すべての黒いマスについて, その黒いマスが i 行 j 列にあった時 A_iと B_jを辺で結ぶ. これを繰り返すことで 2 部グラフを構成する (A_1〜A_nは行に, B_1〜B_nは列に対応してるイメージ). こうすると, 題意の 2 つの条件は

- G の辺の本数は m 本である
- G の全頂点の次数はいずれも 2 以上である. また, G の任意の辺について, そのどちらかの端点の次数はちょうど 2 である.

と言い換えられる. これでだいぶ考えやすくなった, 気がする. 辺が多いほど次数 2 の点が増えて, 辺の本数は次数の和の半分だから, 次数 2 の点が多いほど次数の和が小さくて, したがって辺の本数が上から抑えられるみたいなそんなイメージ.

しかしこのイメージがなかなか評価式にできない. とりあえず各頂点の次数を文字でおいてはみたものの, うまくいかない. さっきの m の予想 max 値は, A_1〜A_nと B_1〜B_nの次数がどちらも $(2,\ 2,\ \cdots,\ 2,\ n-2,\ n-2)$ のときにとるのか $\cdots$ 不可解な等号成立条件. そうだ, いっそ次数 2 の点の個数を決めてしまおう. つまり, A_1〜A_nの次数の値のうち 3 以上のものを d_1〜d_a, B_1〜B_nの次数の値のうち 3 以上のものを e_1〜e_bとして, 残りの $2n-a-b$ 個の次数はすべて 2 であるとしてしまう (全部の次数が 2 だったら $a=0$ とか $b=0$ とかしてやればいい). こうするとだいぶ条件を式にしやすくなる, 気がする. 前述のとおり次数の和を見るんだから, $S=d_1+d_2+\cdots+d_a$, $T=e_1+e_2+\cdots+e_b$とおいてしまうとたぶん楽.

まず, 辺の本数が m なんだから当然

$$m=2(n-a)+S=2(n-b)+T$$

となる. これが最初の条件. 2 番目の条件は, 要は次数 d_1〜d_aの点から出てる辺は全部 B_1〜B_nのうち次数が 2 の点から出てる辺のいずれかで, また次数 e_1〜e_bの点から出てる辺は全部 A_1〜A_nのうち次数が 2 の点から出てる辺のいずれかだってことだから

$$S \leqq 2(n-b),\quad T \leqq 2(n-a)$$

となる. 条件と同値ではないけど, たぶんこの状況だと得られる式はこれくらい.

示したいことは (予想が正しければ)$m \leqq 4n-8$ なんだよな. とりあえずさっきの 2 式から

$$m=2(n-a)+S \leqq 2(n-a)+2(n-b)=4n-2(a+b)$$

とわかるから, $a+b \geqq 4$ ならＯＫ.

そうじゃない場合を示そう. $a+b \leqq 3$ ってことか. 例えば $(a,\ b)=(1,\ 2)$ とか考えてみよう. $S=2n-4$ とかにならないか? $\cdots$ あっ, このとき $S=d_1 \leqq n$ やんけ. なるほどだいたいわかった. つまり $a+b \leqq 3$ のとき, a と b のうちどっちかは 1 以下だから, 対称性より $a \leqq 1$ とすると

- $a=1,\ b \geqq 1$ のとき : $S=d_1 \leqq n$ だけどもし $S=d_1=n$ だとすると, その次数 n の点は $B_1 \sim B_n$ のすべてに向かって辺を伸ばしてる. ってことは $B_1 \sim B_n$ はすべて次数 0 $\Longrightarrow b=0$, 矛盾. よって $S \leqq n-1$ より $m=2(n-a)+S \leqq 3n-3 \leqq 4n-8 (\because\ n \geqq 5)$
- a *or* $b=0$ のとき : 対称性より $a=0$ とすると自明に $S=0$ なので $m=2(n-a)+S=2n \leqq 4n-8$

以上より, $m \leqq 4n-8$ と言えた ($=0$ とかで場合分けしたのは全部ちゃんと $4n-8$ 以下になるように調整するため). 構成は max を予想した時点でできているのでＯＫ.

解説:マス目をグラフに対応させるところが大半みたいな感じですね. あとは, 題意の条件を使いやすい形に次数を文字でおいてあげられれば勝利でしょう. グラフに対応させないでもできるのかな $\cdots$ と思ったけどあまりよくわかりませんでした. 残念.

おはなし:マス目のグラフ対応, 割と好きです. おしゃれでしょう? それに, 未知数をゴリゴリ不等式評価するタイプの組合せも好きです (こっちはおしゃれって感じじゃないけど). というわけで収録. 好みの問題です.

10 IMO 2015 3

鋭角三角形 ABC は $AB > AC$ をみたしている. 三角形 ABC の外接円をΓ, 垂心を H, A から対辺に下ろした垂線の足を F とおく. また, 辺 BC の中点を M とおく. 点 Q をΓ上の点で$\angle HQA=90°$をみたすものとし, 点 K をΓ上の点で$\angle HKQ=90°$をみたすものとする. $A,\ B,\ C,\ K,\ Q$ は相異なる点であり, この順にΓ上にあるとする.

このとき, 三角形 KQH の外接円と三角形 FKM の外接円は互いに接することを示せ.

三角形 ABC って言ってるけど辺 AB と AC ってそんな関係ないよね. ってことで図には描かず. ちょっとしたことだけど, 本質を見抜くのに結構大事だったりする. 見たところそんなに奇抜な設定はないし, あんまり難しくないかも. 円同士が接することを示すには, 接点になりそうなところから接線を引くのが定番. これでうまくいってくれたらいいけど $\cdots$

さて，とりあえず条件を見ていこう．$\angle HQA = 90°$か，ってことは HQ とΓの Q 以外の交点をとるとその点と A を結んだ線分はΓの直径．あれ，ってことは，この直径を AA'とすると HA'は M を通るやんけ，これはさすがに知ってる (参考 :APMO 2012 4). H を F に関して対称移動した点がΓ上にあることからすぐわかる．

これで，Q の位置がちょっとわかりやすくなった．$\angle QKH = 90°$はこれ以上解きほぐせなさそう．で，示すべきことは三角形 KQH の外接円と三角形 FKM の外接円が接することか．円をそれぞれω_1，ω_2とおこう．図的にどう見ても内接ですねえ．K で接することが言いたい．とりあえずω_1の K 接線を引いた．こいつがω_2に接することをいうのか．

ここでひらめく．例えばω_1の K 接線と BC との交点を Z とかおいてやると，方べきの定理から $ZF \cdot ZM = ZK^2$を示せばいいわけだ．んで，ω_1の H 接線と BC の交点を Z'とかおいてやると，$\angle Z'FH = \angle Z'HM = 90°$だから $Z'F \cdot Z'M = Z'H^2$になる．ってことは，Z'が Z に一致することが言えたら，$ZF \cdot ZM = ZH^2 = ZK^2$となるから$\omega_1$と$\omega_2$は接すると言える!

Z と Z'が一致するってのは図的にも正しそう．これもう勝ったんじゃね? ここで少し詰まったが，ちょっと考えていると幾何の女神が「HA'を直径とする円を考えなさい$\cdots$」とささやいてくれた (宗教体験). なるほどね．この円をω_3とした．こうすると，一番最初の議論からω_3は H の F に関する対称点を通る．この点を H'とおいた．なんと美しい根心の構図だこと! Γとω_1の根軸は KQ，Γとω_3の根軸は $H'A'$，ω_1とω_3の根軸は H を通り QA'に垂直な直線，つまり $Z'H$ なのでこれら 3 直線は共点．この点を X とすると M は HA'の，F は HH'の中点だから，Z'は HX の中点．ってことは，Z'は直角三角形 KHX の斜辺の中点より $Z'H = Z'K$，よって $Z'K$ はω_1の接線，つまり Z'は Z と一致する．はい証明終わり．

解説:だいぶストレートに解き進められたと思います．幾何分野はよく見る構図から敢えて外すのが最近のトレンドなのですが，この問題は割合素直な図です．反転して解く人が多いようですが，反転しなくても普通に解けます．

おはなし:幾何の女神に助けられましたね (幾何の女神を如何に味方につけるかが幾何の実力，とも言えますが). 三角形 ABC がどうのこうのと言っていますが，図としては Q と A'に関して対称なのが面白いです．2015 年のIMOは，完全に代表になれたと思っていて春合宿で落ちたので，解いたときは少し複雑な気持ちになりました．

11 IMO Shortlist 2010 A6

f と g を，正整数に対して定義され正整数値をとる関数とする．任意の正整数 n に対して

$$f(g(n)) = f(n) + 1, \quad g(f(n)) = g(n) + 1$$

が成り立つとき，全ての正整数 n に対して $f(n)=g(n)$ となることを示せ.

でました $\mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ の FE. しかも未知関数 2 つの FE でもある. ワクワク. とりあえず結論としては $f(n)=g(n)$ となるらしいので，まず $f(f(n))=f(n)+1$ について考えよう.

例えば $f(1)=c$ とかおいてやると，$n=1$ 代入して $f(c)=c{+}1$ とかか. ってことは $n=c$ を代入で $f(c+1)=c+2$, 以下順次 $f(c+2)=c+3$, $f(c+3)=c+4$, $\cdots$ となる. つまり十分先で $f(x)=x+1$ だ. 同じようにして，任意の n について $f(x)=x+1(\forall x \in \mathbb{Z}_{\geqq f(n)})$ となる.

これ以上特に何も得られなさそうだったので元の問題に戻る. $f(f(n))=f(n)+1$ をみたす f 自体はそれなりにいろいろありそうだし自由度高いなぁみたいな気持ちになる. うーん，こういうの, 普通のことを普通にやるだけじゃ解けないからなぁ $\cdots$ まあとりあえず定石通り動くか，というわけで $f(x)$ と $g(x)$ の最小値をとってみる (さすがに最小値の存在は自明だよね). 各々 m_1, m_2 とかおいた. ん，$f(hoge)=t \Longrightarrow f(g(hoge))=t+1$, ってことは $F=\{f(n)|n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ とすると $F=\{m_1,\ m_1+1,\ m_1+2,\ \cdots\}$ となるわけか. 同様にして，$G=\{g(n)|n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ とすると $G=\{m_2,\ m_2+1,\ m_2+2,\ \cdots\}$ となる. 対称な式適当に作って $m_1=m_2$ とかいえないかな，などと妄想.

とはいえこのままだと何も動かないぞい. すこし考えて，次の F_t, G_t をとったらいいんじゃね? みたいな着想を得る.

$$F_t=\{n|f(n)=t\},\quad [G_t=\{n|g(n)=t\}$$

これをちょっといじってみよう. $f(x)=t$ なる x について $g(x)=g(f(x))-1=g(t)-1$, ってことは $F_t \subseteq G_{g(t)-1}$ となるのか $(t \geqq m_1)$. 同様にして $G_t \subseteq F_{f(t)-1}(t \geqq m_2)$. あっ，$F$ と F でつながるやんけ! どういうことかというと

$$F_t \subseteq G_{g(t)-1} \subseteq F_{f(g(t)-1)-1} \Longrightarrow t=f(g(t)-1)-1 \Longrightarrow F_t=G_{g(t)-1}=F_{f(g(t)-1)-1}$$

やっためう! あ，言い忘れてたけどここの等号成立は F_t がどの 2 つも共通要素を持たないかつどの F_t も空集合でないことに依ります. さすがに自明だけど結構強い性質. ちなみに，さっきの議論は $t \geqq m_1$, $g(t) \geqq m_2$ で成り立つ，って書く必要があるけど $g(t) \geqq m_2$ は $t \geqq m_1$ から導かれるのでいりません (念のため).

さて，ところで $F_t=G_{g(t)-1}$ って左の添え字に対して右の添え字自由度低すぎるよね. この気持ちをもう少し正確に議論しよう.

$$F_{m_1}=G_{g(m_1)-1},\quad F_{m_1+1}=G_{g(m_1+1)-1},\quad F_{m_1+2}=G_{g(m_1+2)-1},\ \cdots$$

となるので，$F=\{m_1,\ m_1+1,\ m_1+2,\ \cdots\}$ より

$$\mathbb{Z}=\bigcup_{t=m_1}^{\infty}F_t=\bigcup_{t=m_1}^{\infty}G_{g(t)-1}$$

ってことは，もし $\{g(m_1)-1,\ g(m_1+1)-1,\ g(m_1+2)-1,\ \cdots\}$ に $\{m_2,\ m_2+1,\ m_2+2,\ \cdots\}$ のどれかが含まれていないとすると，それを k とかおいたときに

$$\mathbb{Z}=\bigcup_{t=m_1}^{\infty}G_{g(t)-1}\subseteq\bigcup_{u=m_2}^{\infty}G_u\setminus G_k=\mathbb{Z}\setminus G_k$$

となってさすがにヤバいよね. G_kが空集合じゃないのは $G=\{m_2,\ m_2+1,\ m_2+2,\ \cdots\}$ より保証されてる. ってわけで

$$\begin{aligned}&\{g(m_1)-1,\ g(m_1+1)-1,\ g(m_1+2)-1,\ \cdots\}=\{m_2,\ m_2+1,\ m_2+2,\ \cdots\}\\ &\quad\Longrightarrow\{g(m_1),\ g(m_1+1),\ g(m_1+2),\ \cdots\}=\{m_2+1,\ m_2+2,\ m_2+3,\ \cdots\}\end{aligned}$$

とわかる. 同様に

$$\{f(m_2),\ f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ \cdots\}=\{m_1+1,\ m_1+2,\ m_1+3,\ \cdots\}$$

も言える.

さてさてここからどうしよう. 出てきた式をボーっと眺めていると，題意の式が目に入る. さっきの等式の全部の要素に f かぶせたら，題意の式が使えてハッピーっぽくね?

$$\begin{aligned}&\{f(g(m_1)),\ f(g(m_1+1)),\ f(g(m_1+2)),\ \cdots\}\\ &\qquad\qquad=\{f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ f(m_2+3),\ \cdots\}\\ &\Longrightarrow\{f(m_1)+1,\ f(m_1+1)+1,\ f(m_1+2)+1,\ \cdots\}\\ &\qquad\qquad=\{f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ f(m_2+3),\ \cdots\}\\ &\Longrightarrow\{f(m_1)+1,\ f(m_1+1)+1,\ f(m_1+2)+1,\ \cdots\}\\ &\qquad\qquad=\{m_1+1,\ m_1+2,\ m_1+3,\ \cdots\}\setminus\{f(m_2)\}\\ &\Longrightarrow\{f(m_1),\ f(m_1+1),\ f(m_1+2),\ \cdots\}\\ &\qquad\qquad=\{m_1,\ m_1+1,\ m_1+2,\ \cdots\}\setminus\{f(m_2)+1\}\end{aligned}$$

いい感じ. ここで対称性より $m_1\geqq m_2$としてしまおう. このまま $m_1=m_2$示せそうじゃね? とりあえず $m_1>m_2$としてみる.

このときどうなるかっていうと，$m_1>m_2$だから

$$\begin{aligned}&\{f(m_1),\ f(m_1+1),\ f(m_1+2),\ \cdots\}\subseteq\{f(m_2),\ f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ \cdots\}\\ &\Longrightarrow\{m_1,\ m_1+1,\ m_1+2,\ \cdots\}\setminus\{f(m_2)+1\}\subseteq\{m_1+1,\ m_1+2,\ m_1+3,\ \cdots\}\end{aligned}$$

さすがに $f(m_2)=m_1+1$ は自明だよね. んで等号成立, と $\cdots$ あれ, でもこの等号って成立すんのか? しなさそう. 具体的には, 等号が成立するってことは $\{f(m_1),\ f(m_1+1),\ f(m_1+2),\ \cdots\}=\{f(m_2),\ f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ \cdots\}$ ってことで, $m_1>m_2$だから f が単射なら等号は不成立とわかる. $f(f(n))=f(n)+1$ における考察から, f は完全に単射じゃなくてもある程度先の方で単射とかにはなるはず. これくらいはここまでのどっかで言えてそう. 今まで書いた式を見直すと, $F_t=G_{g(t)-1}$とかいう式がある. そうか, ここから g は () の中身が m_1以上で単射とわかるってわけだ. ってことは対称性より (これを導いた時点では m_1 と m_2の大小関係の仮定を置いてないから)f は () の中身が m_2以上で単射であることも言えるはず. ってことは, $m_1>m_2$よりめでたく等号は不成立, より矛盾. ようやく $m_1=m_2$と言えた.

はー長い, まだ終わらんのか. ええと, さっきの議論は $m_1=m_2$でもだいたい流用できて

$$\begin{aligned}\{f(m_1),\ f(m_1+1),\ f(m_1+2),\ \cdots\}\ &=\{f(m_2),\ f(m_2+1),\ f(m_2+2),\ \cdots\}\\ \Longrightarrow \{m_1,\ m_1+1,\ m_1+2,\ \cdots\}\setminus\{f(m_2)+1\}&=\{m_1+1,\ m_1+2,\ m_1+3,\ \cdots\}\end{aligned}$$

なるほどね, ってことは $f(m_2)+1=m_1+1$ なのはさっきと一緒. あらためて $m=m_1=m_2$ とすると, $f(m)=m+1$ となる. 同様にして $g(m)=m+1$. ああ, ってことは題意の 2 式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}&f(m+1)=f(g(m))=f(m)+1=m+2\\ &\Longrightarrow g(m+1)=g(f(m))=g(m)+1\\ &\Longrightarrow f(m+2)=f(g(m+1))=f(m+1)+1=m+3\\ &\Longrightarrow g(m+2)=g(f(m+1))=g(m+1)+1=m+3\\ &\qquad\qquad\qquad\vdots\end{aligned}$$

となるので, $f(x)=g(x)=x+1(\forall x\in\mathbb{Z}_{\geqq m})$ とわかる. もうほぼ勝ち確やろ, x が小さいときの $f(x)$ とか $g(x)$ とかがわかればいい. でも $f(f(n))=f(n)+1$ のときもそのへんよくわかってなかったしなぁ $\cdots$ ってあれ, $g(n)\leqq m$ ってことは $f(g(n))=g(n)+1$ やんけ! 題意の式と合わせて $f(n)=g(n)$ といえた. やっためう!

解説:手数がだいぶ多くなってしまいました. 集合論的な考え方をするのは $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}FE$ ではよくあると思います. 最小値をとってくるとかはもう典型ですね. 上記の F_tとか G_tをとってくるの, 応用範囲広そうだなぁと思いました.

おはなし:この原稿を書くにあたって自分が過去に書いたいろいろな答案を読み返していたのですが, 実はこの問題は, 当時の答案を読んだときに (あれ $\cdots$ この議論ヤバくね $\cdots$) と思っ

て解きなおしたんですよね. 今度はさすがにヤバい議論はしてない $\cdots$ はずです. 要反省, というわけでセレクト.

12 IMO Shortlist 2014 G6

鋭角三角形 ABC がある. 辺 AC 上の点 E と辺 AB 上の点 F の組 $(E,\ F)$ が以下の条件をみたすとき **面白い** 組であるという:

線分 EF の中点を M, 線分 EF の垂直二等分線と直線 BC の交点を K とし, 線分 MK の垂直二等分線と直線 $AC,\ AB$ の交点をそれぞれ $S,\ T$ としたとき, 4 点 $K,\ S,\ A,\ T$ は同一円周上にある.

2 つの組 $(E_1,\ F_1),\ (E_2,\ F_2)$ がいずれも面白いとき, $\dfrac{E_1E_2}{AB} = \dfrac{F_1F_2}{AC}$ が成り立つことを示せ.

ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする.

---

2 つの面白い組をいっぺんに扱うのは荷が重い. とりあえず一般の面白い組について考察しよう. 共円に中点, *symmedian* の香りが漂う. AK って *symmedian* っぽくね? 実際, K を通り EF に平行な直線と AM の交点を N とすると, AM は ST の中点を通るので四角形 $KNST$ は等脚台形. したがって, $A,\ S,\ K,\ N,\ T$ は共円となることから, $\angle MAT = \angle NAT = \angle KAS$. やはり *symmedian* だ. つまり, AM と BC の交点を L とすると, $\angle BAK = \angle CAL$ となる.

しかしここから進まない. 少し悩んで, 長さ計算で方針を固める. 対称性を考えて, $AB = b,\ AC = c,\ BC = a,\ BL = x,\ CL = y$ とおいた ($x + y = a$ である). こうすると, K の場所から考えると M の場所は意味不明でも, L の場所から見た M の場所はそんなに意味不明じゃないという利点がある.

とりあえず $AE = e,\ AF = f$ とする. $EM = FM$ という条件がこのままだとしんどいなぁ. とりあえず $e : f$ だけでも知りたい $\cdots$ と思ったら, EF を平行移動してやれば比くらいは求まるんじゃね? と気づく. つまり, B を通り EF に平行な直線を引き, $AC,\ AL$ との交点を $E',\ M'$ としてやると, M' は $E'M$ の中点であり, これはどう見てもメネラウスの形で

$$\begin{aligned}\frac{AE'}{AC}\cdot\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BM}{E'M} = 1 &\Longrightarrow \frac{AE'}{c}\cdot\frac{y}{x} = 1\\ &\Longrightarrow AE' = \frac{cx}{y}\\ &\Longrightarrow AE' : AB = cx : by\end{aligned}$$

となるので，$e : f = AE' : AB = cx : by$ とわかる．対称性を崩さないように，実数 k を用いて $e = kcx$，$f = kby$ とおいた．k を求めればいいことになる．ここまでくると，せっかく三角形 AEF において $symmedian$ の構図があるんだから AK の長さを求めたくなる．あれ，ここから AK の長さの式を作れば，三角形 ABC に着目すれば AK の長さの式ってもうひとつできるんだから，等号で結んで k が求まるんじゃね?

大まかな方針が立ったので計算に移ろう．$symmedian$(の一部の線分) の長さを求める方法ってよく知らないけど，適当に相似とかで求まりそう．実際，三角形 AEF の外接円と AK の交点を X とすると，$\triangle AMF \sim \triangle AEX$，$\triangle KEX \sim \triangle KAE$となるので

$$EX = \frac{AE \cdot EF}{2AM},\ AX = \frac{AE \cdot AF}{AM},\ AK = KX \cdot \left(\frac{AE}{EX}\right)^2$$

$$\Longrightarrow AK = \frac{AX \cdot \left(\frac{AE}{EX}\right)^2}{\left(\frac{AE}{EX}\right)^2 - 1} = \frac{4AE \cdot AF \cdot AM}{4AM^2 - EF^2}$$

とわかる．EF と AM の長さは余弦定理と中線定理から計算できて

$$\begin{aligned}
EF &= \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \angle EAF} \\
&= \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef \cos \angle BAC} \\
&= \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} \\
&= \sqrt{e^2 + f^2 - \frac{ef(b^2 + c^2 - a^2)}{bc}} \\
AM &= \sqrt{\frac{1}{2}(AE^2 + AF^2) - \frac{EF^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 + f^2) - \frac{1}{4}(e^2 + f^2 - \frac{ef(b^2 + c^2 - a^2)}{bc})} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(e^2 + f^2) + \frac{ef(b^2 + c^2 - a^2)}{4bc}}
\end{aligned}$$

となります. 頑張って代入して

$$
\begin{aligned}
AK &= \frac{4ef\sqrt{\frac{1}{4}(e^2+f^2)+\dfrac{ef(b^2+c^2-a^2)}{4bc}}}{\dfrac{2ef(b^2+c^2-a^2)}{4bc}} \\
&= \frac{4k^2bcxy\sqrt{\frac{1}{4}(k^2c^2x^2+k^2b^2y^2)+\dfrac{k^2bcxy(b^2+c^2-a^2)}{4bc}}}{\dfrac{2k^2bcxy(b^2+c^2-a^2)}{4bc}} \\
&= \frac{4kbc\sqrt{c^2x^2+b^2y^2+xy(b^2+c^2-a^2)}}{b^2+c^2-a^2} \\
&= \frac{4kbc\sqrt{c^2x(x+y)+b^2y(x+y)-xya^2}}{b^2+c^2-a^2} \\
&= \frac{4kbc\sqrt{a(c^2x+b^2y-xya)}}{b^2+c^2-a^2}
\end{aligned}
$$

とわかる. しんどいけどまあまあこれくらいなら大丈夫. 次は三角形 ABC から AK の長さを求めよう. B から AC に平行に直線を引いて AK, AL との交点を取るのは等角共役の必須構図だっていうのはよく知ってる. 交点を各々 P, Q とすると, 平行線から

$$AQ = \frac{x+y}{y}AL, \quad BQ = \frac{cx}{y}$$

とわかるので, $\triangle BAQ \sim \triangle BPA$ より

$$BP = \frac{BA^2}{BQ} = \frac{b^2y}{cx}, \; AP = \frac{BA \cdot AQ}{BQ} = \frac{b(x+y)}{cx}AL$$

$$\Longrightarrow AK = \frac{AP \cdot AC}{AC+BP} = \frac{abc}{c^2x+b^2y}AL$$

となる. スチュワートの定理とかあったなあ $\cdots$ そんなん覚えてねえよ! とか思いながら垂線引いてこちゃこちゃ三平方して

$$
\begin{aligned}
AL &= \sqrt{\frac{c^2x+b^2y-xy(x+y)}{a}} \\
&= \sqrt{\frac{c^2x+b^2y-xya}{a}}
\end{aligned}
$$

を得る. さっきの式と似た形が出てきて勝ちを確信.

せっかくいい感じのまとまりが出てきたので，さっきの式を AL でくくると

$$\begin{aligned} AK &= \frac{4kbc\sqrt{a(c^2x+b^2y-xya)}}{b^2+c^2-a^2} \\ &= \frac{4kabc}{b^2+c^2-a^2}AL \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{abc}{c^2x+b^2y} = \frac{4kabc}{b^2+c^2-a^2}$$
$$\Longrightarrow k = \frac{b^2+c^2-a^2}{4(c^2x+b^2y)}$$

とわかる．

ここまでくれば勝利は目前．K を動かしたときに AE，AF の長さがどう動くか考えたいから，泣く泣く x を消去して代入，

$$AE = \frac{c(b^2+c^2-a^2)(a-y)}{4((b^2-c^2)y+ac^2)},\ AF = \frac{b(b^2+c^2-a^2)y}{4((b^2-c^2)y+ac^2)}$$

を得る．

問題に戻って，$E = E_1$，E_2における y の値を y_1，y_2とすると

$$AE_1 = \frac{c(b^2+c^2-a^2)(a-y_1)}{4((b^2-c^2)y_1+ac^2)},\ AE_2 = \frac{c(b^2+c^2-a^2)(a-y_1)}{4((b^2-c^2)y_1+ac^2)}$$

$$\Longrightarrow E_1E_2 = AE_2 - AE_1 = \frac{ab^2c(b^2+c^2-a^2)}{4((b^2-c^2)y_1+ac^2)((b^2-c^2)y_2+ac^2)}$$

$$AF_1 = \frac{b(b^2+c^2-a^2)y_1}{4((b^2-c^2)y_1+ac^2)},\ AF_2 = \frac{b(b^2+c^2-a^2)y_2}{4((b^2-c^2)y_2+ac^2)}$$

$$\Longrightarrow F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = \frac{abc^2(b^2+c^2-a^2)}{4((b^2-c^2)y_1+ac^2)((b^2-c^2)y_2+ac^2)}$$

とわかる．はい大勝利，$E_1E_2 : F_1F_2 = b : c = AB : AC$ より，題意は示された．

解説:筋肉。

初等幾何ラーの人, ごめんなさい. 計算解に関してですが, 示すべき条件からして座標計算では厳しいでしょう. 長さ計算でも計算量は相当多いですが, 理不尽なレベルの計算ではありません. 座標と比べて割と幅広い状況に対応できるのは長さ計算の強みだと思います.

おはなし:この問題は 2015 年春合宿代表選抜試験の第 3 問で, この試験をリアルタイムで受けていた僕には, 手も足も出ませんでした. およそ 1 年経ち, 2016 年春合宿前日に解きなおしました. 上述の通り, どうにかこうにかという感じではありましたが完答し, 少なからず自信をつけることができました. そういう意味で, 今年代表になれたのはこの問題のおかげかな, と思ったりします.

13 あとがき

いかがでしたでしょうか. 去年に引き続きページ数だけは多いものとなってしまいました. 反省はしていません. 自分としては, いい振り返りになったかな, と思います. ここまでお付き合いいただいた方, ありがとうございました. これで心置きなく引退できる, ような気がします.

14 出典 · 参考 HP

各問題に記していた出典の略称および, 本稿作成にあたって参考にした HP について説明します.

14.1 出典

- JJMO: 日本ジュニア数学オリンピック. 日本国内の中学生を対象としたコンテストです. 試験形式は 4 時間 5 問と, JMO と全く同じものです.
- IMO: 国際数学オリンピック. 毎年 7 月に行われる国際大会で, 多くの国々が参加しています. 各国からは最大 6 人の選手が開催地に派遣され, 全員の合計得点で国別に順位を競います. 試験形式は 4 時間半 3 問× 2 日. 金メダルのラインはおおよそ 4 完くらいです.
- IMO Shortlist: 前述の IMO の問題は, 毎年各国が開催国に自分たちが作成した問題を提出し, それらの中から偉い人たちが選んだ問題から構成されています. Shortlist とはその候補問題のうち,IMO の問題には選ばれなかった問題をあつめたリストです. 各々の年に開催された IMO の Shortlist の問題は, 各国が国内の IMO 代表選抜の試験として使うことがあるので, 翌年の IMO まで一般公開が禁止されています (つまり各国の数

学オリンピック委員会の偉い人たちは知っているわけです).

- APMO:アジア太平洋数学オリンピック. 国際大会ですが試験および採点は各国で行われ, 各国の選手の上位 10 人が代表選手となり, 答案が開催国に送られます. 開催国側が採点の再チェックを行い, 選手全員の得点の合計で国別に順位を競います. 試験形式は JMO と同じです.
- USAMO:アメリカ数学オリンピック. アメリカにおける国内コンテストです. 日本と同じように, IMO の代表選抜に参加する生徒を選抜する目的で行われます. 試験形式は IMO と同じです.
- MEMO:中央ヨーロッパ数学オリンピック. オーストリア, クロアチア, チェコ, ドイツ, ハンガリー, リトアニア, ポーランド, スロバキア, スロベニア, スイスの十か国が参加する, 国際大会です. 個人戦とチーム戦の種類の競技があります. 試験形式は, 個人戦の方が 5 時間 4 問, チーム戦の方が 6 人で 5 時間 8 問と, 少し特殊です.
- RMM:ルーマニア国際数学オリンピック. ルーマニアと名がついているけど国際大会です. 日本も招待はされているようですが, 参加はしていません. 数学以外にも物理, 化学, 情報部門があります. 数学部門は IMO での成績上位国向けの大会になっていて, 試験形式は IMO と同じですが, 難易度はそれよりも難しいものとなっています.
- IZhO:国際 Zhautykov 数学オリンピック. ロシア及び周辺諸国の参加する国際数学オリンピック. Zhautykov は人名らしいです (どんな人かはよくわかりませんでした $\cdots$). 数学以外にも物理, 情報部門があります. 試験形式は 4 時間 3 問.

14.2 参考 HP

- IMO 公式 HP(https://www.imo-official.org):IMO の公式 HP です. Problems のコーナーに, 過去の IMO の問題や Shortlist およびその解答が pdf 形式でアップロードされています.
- Art of Problem Solving(http://www.artofproblemsolving.com):様々な数学のコンテストの問題がアップされている掲示板. 海外の国内大会や国際大会の問題がたくさん上がっており, また多くの強者達によって解答が書き込まれています.

ヘロンの公式　〜小学生向け〜

No.
Date

古川 駿

0、本日は第70回灘校文化祭、また数学研究部にお越しいただき、まことにありがとうございます。この記事は本格的な数学の議論ではなく、小学生にも楽しんでもらえるようにしたものになっています。中学で習う数学をほとんど知らない方にも理解していただけるように、なるべく丁寧に書いたつもりですが、かえって冗長に思われた方はその部分は寛大に読み飛ばして下されば幸いです。逆に他の記事を難しく感じた小学生の方はぜひ読んでみてもらえたら嬉しいです。

1、まず、次の問題を考えてみて下さい。

①　三辺の長さが 13cm, 14cm, 15cm の三角形の面積は？

どうでしょう？鋭い人なら、5cm, 12cm, 13cm の直角三角形と 9cm, 12cm, 15cm の直角三角形をつないだものだと気付いたでしょうか。答えは 84 (cm²) となります。
では次の問題はどうでしょう。

②　三辺の長さが 17, 20, 27 の三角形の面積は？

実はこの問題は先ほどのようにはうまくいかないと思います。答えは $120\sqrt{2}$ となります。
（ここで $\sqrt{A}$ というのは、2回かけると A になる数のことで、例えば $\sqrt{25}=5$ で、一辺1の正方形の対角線の長さは $\sqrt{2}$ です。）
垂線を下ろして方程式を立てればできるのですが、小学生だとそうもいかないと思うので、ここで「ヘロンの公式」が登場します。

No.

Date

ヘロンの公式

三辺の長さが a, b, c である $\triangle ABC$ の面積は、

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とすると、

$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ である。

初めて見た方にとっては、「え？ほんとに!?」となるような公式だと思います。僕も小学生の頃、友人に教えてもらったとき「すごいなー、不思議だなあ」と思った記憶があります。

これを使うと先ほどの①は $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ で

$$\triangle ABC = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

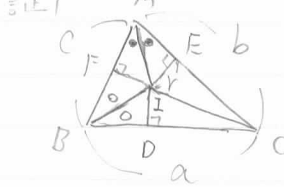
②は $s = 32$ で $\triangle ABC = \sqrt{32 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 15} = 120\sqrt{2}$

と一瞬で求まってしまいます。

では、この不思議な公式の証明をしてみましょう。三角関数を使えば計算で示せるのですが、この記事では初等的に示したいと思います。実は意外と簡単に示せてしまうのですが、この証明には、内心・傍心の知識が必要なので、次のページでその準備をします。

2、① 内心　　三角形の3つの頂点の内角の二等分線は
1点で交わり、この点を内心という

証)



∠A, ∠Bの二等分線の交点をIとし、
Iから各辺に下ろした垂線の足を
図のようにD, E, Fとする。

$\triangle AFI \equiv \triangle AFI$
$\triangle BFI \equiv \triangle BDI$　　(≡は「合同」を表します)

だから $ID = IE = IF\ (=r)$ となり、$\triangle CID \equiv \triangle CIE$
よって $\angle ICD = \angle ICE$ となり、示されました。

ここで三辺の長さを $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とおくと

$$AE + AF = b + c - (BF + CE)$$
$$= b + c - (BD + CD)$$
$$= b + c - a$$

$$BD + BF = a + c - b$$
$$BD = \frac{a+c-b}{2} = s - b$$

となり　$AF = \dfrac{b+c-a}{2} = s - a$　　$\left(s = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$
となります。

ここで $\triangle ABC = \frac{1}{2}(a \times ID + b \times IE + c \times IF)$　$(ID = IE = IF = r)$
$= \frac{1}{2} r (a+b+c) = sr$ となります。

② 傍心　　三角形の1つの頂点の内角の二等分線と
あとの2つの頂点の外角の二等分線は1点で
交わり、この点を傍心という。

証明は全く同様にできるので割愛します。
傍心をXとし　$XL = XM = XN = R$ とします。

No.

Date

ここで $AM=AN$ で $AM+AN=AC+CM+AB+BN$

$$=AC+AB+CL+BL$$

$$=a+b+c$$

$$\therefore AM=AN=\frac{a+b+c}{2}=s$$

$BL=BN=AN-AB=s-c$ となります。

さあ、これで準備は完了です。いよいよ証明に入りましょう。

r を、R を使って2通りに表します。

3. A, I, X が一直線上にあることに注意して

図から $r:R=AF:AN$

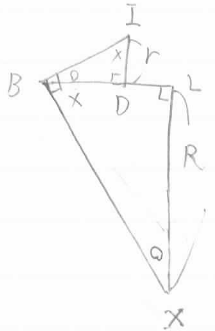
$=s-a:s$ がわかります。

したがって $r=\dfrac{R(s-a)}{s}$ です。

さらに、$\angle IBX=\angle IBC\ (\circ)+\angle XBC\ (\times)$

$$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle NBC$$

$=90^\circ$ だから



図のように相似ができて

$$r:BD=BL:R$$

したがって $r=\dfrac{BD\times BL}{R}=\dfrac{(s-b)(s-c)}{R}$

もうほとんどできました。

$$s^2r^2=s^2\cdot\frac{R(s-a)}{s}\cdot\frac{(s-b)(s-c)}{R}=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$\triangle ABC=sr$ だったので

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. いかがでしたか？ 神秘的に思えた(?)公式が内心・傍心の基本的な知識と、2組の相似だけで結構あっさり示されてしまいました。小学生の方にも十分理解していただけたのではないでしょうか。
できるだけ見やすくわかりやすく書いたつもりですが、読みにくいところがあったなら、申し訳ありません。

さて、この記事を通して、僕が(特に小中学生の)読者の方に伝えたかったことは、幾何の奥深さ・面白さです。この短い記事でそれを十分に伝えられたとは思っていませんが、「そうか、こんなふうに証明できるのか」「もっと幾何に取り組んでみようかな」と少しでも思って下さった方がいれば、非常に嬉しく思います。

小・中学生の時期が一番頭がやわらかく、様々なアイデアを思いつける時期だと思うので、暇な時にでも、幾何の難しい問題にゆっくり時間をかけて取り組んでみて下さい。そうして試行錯誤を繰り返して解けなかった悔しさ、そして解けた達成感を積み重ねていけば、自然と初等幾何のセンスは磨かれてくると思います

最後になりますが、ここまで読んで下さってありがとうございました。この記事が、幾何に興味を抱いてもらえる一助となったのであれば、これ以上のことはありません。では、引き続き灘校文化祭をお楽しみ下さい。

入試模試のうらがわ

高校 3 年 3 組 47 番 美間 亮太

０．はじめに

本日は灘校数学研究部にお越しいただきありがとうございます。今回は入試模試について、僕が出題した問題の背景や入試模試担当の話など書こうと思います。

１．入試模試とは？

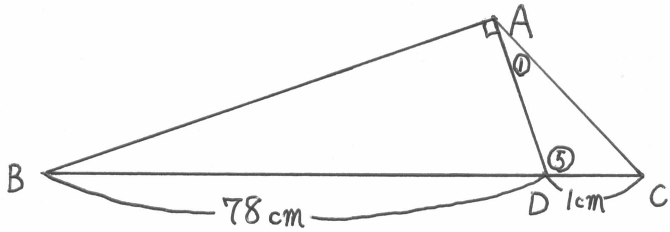
小学生に算数の楽しみを伝えたいというコンセプトで毎年算数の問題を灘中入試 1 日目の形式で出題しています。今年で 20 回目を迎え、その記念として 2 日目バージョンも作りました。過去の問題は http://nada-mathclub.jimdo.com/ で見ることが出来ます。

２．問題のうらがわ

僕が去年までに作問した問題の背景などについて書きたいと思います。

2015 $\boxed{10}$

△ABC の面積は？[1]



シンプルなものの一筋縄にはいかない、個人的に一番好きな問題です。正解者は一名でした。（三角関数で解かれたそうです…[2]）ではまず略解から…

5 倍角では扱いにくいので 5 倍角→4 倍角→2 倍角

としていくのがポイントです。

180°−{(180°−⑤) + ①} = ④

をふまえて…

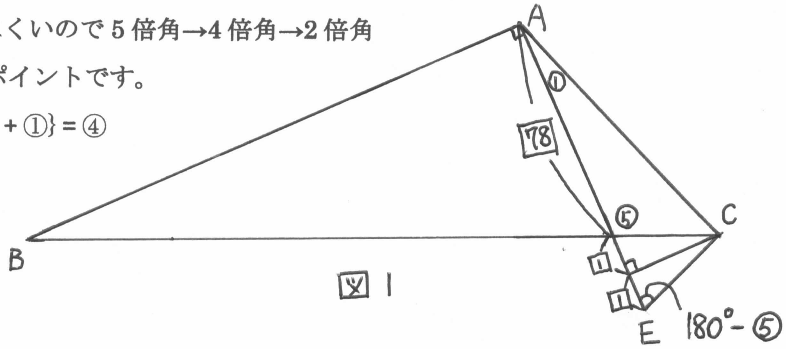


図 1

△ ACE について

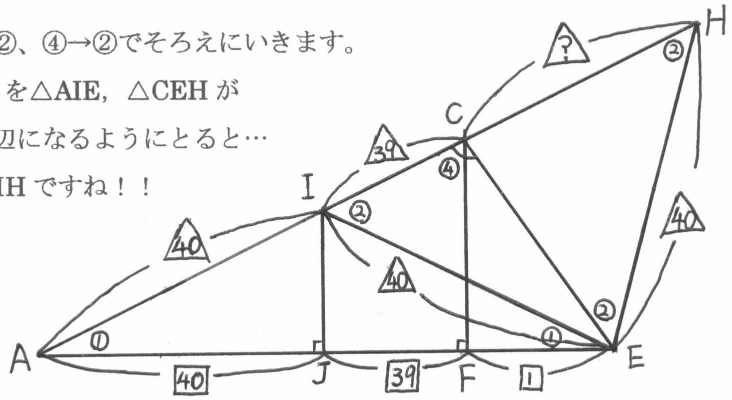
∠CAE＝①、∠ACE＝④なのでこれについて考えていけば良さそうです。

---

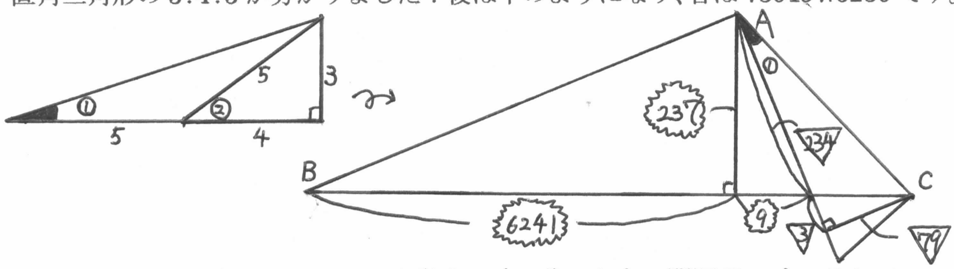
[1] 実際の問題とは表現や図が違いますが実質同じ問題です。以降も同様です。

[2] 三角関数、複素座標など数学を用いて解を求めていただいても構いませんが、出来ればそのあと算数の解法を考えていただければ幸いです。

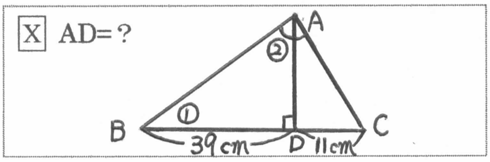
①→②、④→②でそろえにいきます。
I、H を△AIE，△CEH が
二等辺になるようにとると…
IE＝IH ですね！！

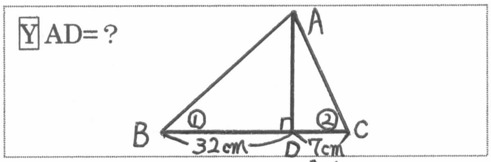


辺の比が上のように求まり、△IEH と△HCE の相似より？＝25 で、角の一つが②の直角三角形の 3:4:5 が分かりました！後は下のようになり、答は 730197/6250 です。

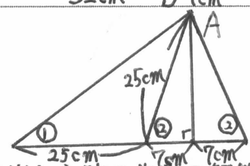


この問題のもととなっているのは小学生の時に作った左の問題 X です。そしてこの問題は、問題 Y の問題を読み間違えて解いたことがきっかけです。

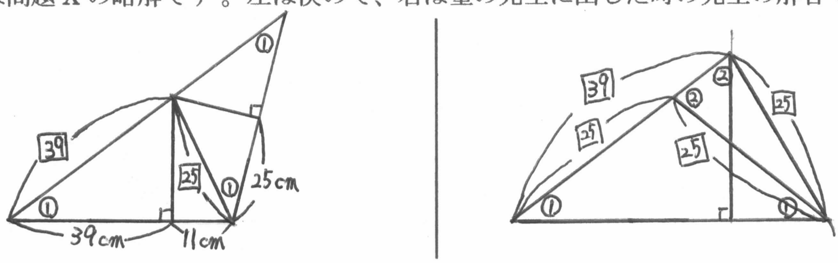




問題 Y は右図のように解けます。
ここで略解の図 1 をもう一度見てみると…
似てますね！



下は問題 X の略解です[3]。左は僕ので、右は塾の先生に出した時の先生の解答です[4]。



2 つを組み合わせるとなんと図 2 が得られます！一つの問題から得られた様々なことを組み合わせて新たに 1 つの問題が出来るのなにか面白くないですか？

---

[3] AB：AC が求まれば∠A の二等分線を引いて、三平方の定理より AD も求まります
[4] 生意気ですね

次の問題は僕が中２の時に初めて出した問題です。先輩に数分で解かれてしまったのを覚えています。当日の正解者は０人でした。

2013 $\boxed{12}$

△EHFと△EHG
の面積の和は？

図3

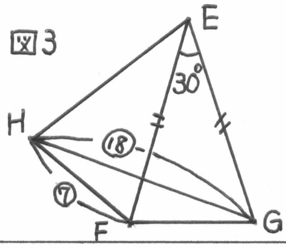
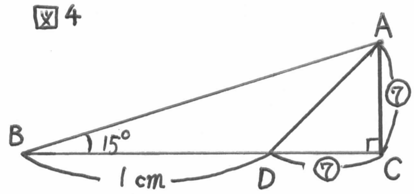
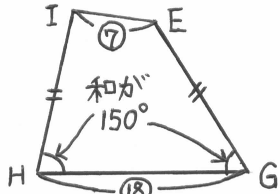
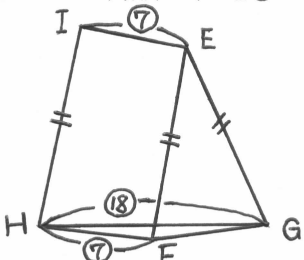


図4

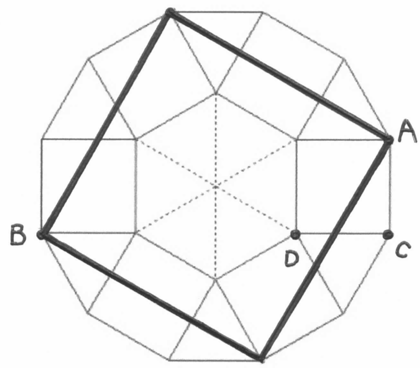


この問題は２つのアイデアからできています。
まずは一つ目。
有名な図として右図の四角形IHEGを12個くっつけると
(一辺⑱の正12角形)―(一辺⑦の正12角形)となります。

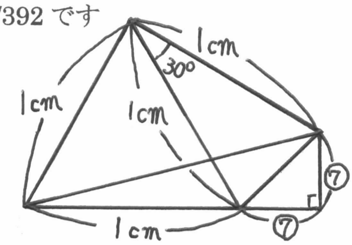




この四角形IHEGをいじってみます。
角度の和が150°を言い換えたいです。
角度を移したい時、平行四辺形を作るとうまくいく事があります。四角形IEFHが平行四辺形となるようFをとります。
角度の和が150°という条件は角FEGが30°に言い換えられました。△EHFと△EHGの面積の和は、四角形IEGHの面積になります。
こうして図3ができました。
もう一つのアイデアは、右図[5]の
正12角形の有名な分割です。
中に図4がありますね。



1cmという条件は太線の正方形の一辺の長さが1cmを意味し、その正方形の面積は
(一辺⑦の正三角形の面積)の8倍と(1辺⑦の正方形の面積)の4倍なので、(一辺⑦の正三角形)12個と(1辺⑦の正方形)6個からなる一辺⑦の正12角形の面積は1.5cm²だとわかります。答は275/392です
後半は右図を用いても解けます。
想定解より簡単な解が見つかることは
作問においてはよくあります(泣)



[5] http://ks.c.yimg.jp/res/chie-ans-255/255/226/263/i320 の画像を使わせていただきました

2015 $\boxed{5}$ A,B,C の 3 人について誰かの年齢が他のどちらかの年齢の 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 倍ということがどれも一度はあったという。またこの 3 人の中で A が一番若いとすると、A が生まれた時の B,C の年齢の和として考えられる 7 番目に小さい数は？

なぜ 7 番目にしてしまったのか後悔しています。かなり大変です。僕の解は 173 ですが、あまり自信はないです[6]。問題としてはパズルみたいで楽しいと思います。
当日の答は 700 以上のような大きな解ばかりでした。ちなみにこの時の作問者からのひとこと[7]で、「寿命は無視で OK。でも大きすぎる時は何かに気付いていないかも」と書きました。みなさん次のようにされたのではないでしょうか？

3 人の年齢の差は 3 つ考えられ、これらは一定である。これらの中に 8,9,10,11,12,13,14,15 の倍数がどれも少なくとも一つあればよい[8]。……①

小学生の時、こういう年齢算の問題を解いて違和感を覚えた事がこの問題を作ったきっかけです。例えば僕には今高 2 の弟がいますが、僕との年齢差はずっと 1 でしょうか？ポイントは誕生日が違えば 2 人の年齢差は 2 通り考えられるということです。
僕の答の 173 は A,B,C の誕生日が 2 月,4 月,6 月で、A が生まれた時 B が 30 歳 C が 143 歳[9]ならば成り立ちます。年齢の差として考えられるのは 30,113,143 だけでなく、31,112,144 もあるからです。
一年の始まりはどこ基準でも構わないので A が生まれた日を基準とします。A が生まれた時、B は a 歳で C は a+b 歳とします。次の 2 つのケースが考えられます。

・Case1(A が生まれた直後 C より B の方が先に誕生日を迎える)
この時 A と B の差は a,a+1、B と C の差は b,b-1、A と C の差は a+b,a+b+1
・Case2(A が生まれた直後 B より C の方が先に誕生日を迎える)
この時 A と B の差は a,a+1、B と C の差は b,b+1、A と C の差は a+b,a+b+1

①の 8 個を、6 個の差で満たすので複数満たす数があります[10]。この数は大きくなりがちなのでこの数で場合分けすると良さそうです。以下略解。
☆8,9,10,11,12,13,14,15 の倍数のうち 4 つを満たすものがある時
・120 がある時 Case2 で a=13,b=107 は満たす
☆8,9,10,11,12,13,14,15 の倍数のうちちょうど 3 つを満たすものがある時
・60 がある時は、条件を満たすものは存在しない

---
6 もっと小さい解が見つかれば連絡ください。
7 裏の右に書いてあるやつです。
8 例えば A と B の年齢の差が 1,2,7,10,14 の倍数の 70 ならば、B が A の 2,3,8,11,15 倍となることがあります。
9 C さんも大変です…
10 1 つとは限りません。

・72 がある時は、条件を満たすものは存在しない

・90 がある時は Case2 で a=35,b=55、a=55,b=35 の時条件を満たす

・144 がある時は、Case1 で a=30,b=113、Case2 で a=14,b=129 の時条件を満たす

(143,144 があれば残りは 10,14,15 の倍数があり 10,15 の倍数両方を満たす(つまり 30 の倍数)があるかないかで場合分けする。ないときは 10 の倍数と 15 の倍数の差と和が 5 の倍数であることを用いる)

☆その他

8,9,10,11,12,13,14,15 の倍数という 8 つの条件を 6 個の数字で満たさないといけないので 2 つだけを満たすものが 2 個以上存在(鳩ノ巣原理)

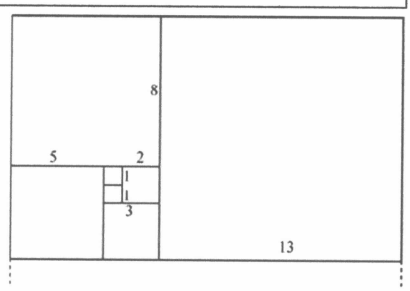
3 個以上存在する時は Case1 で a=39,b=45、a=44,b=40 の時満たす。2 個丁度ならばその他は 1 つずつ(それぞれ異なるもの)を満たさなければならない。しかしこれを満たすものはない

次の問題は後で述べますがある意味悪問です(笑)。当日の正答者は十数人です。小学生が一生懸命計算していてくれて嬉しかったです。作問者として自分の問題を考えてもらえることほど嬉しいことはありません。

以下 3 乗記号 N^3(＝N×N×N)を使います。

2014 $\boxed{1}$ フィボナッチ数 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,……,10946 に対して $1^3+1^3+2^3+3^3+5^3+8^3+13^3+21^3+\cdots\cdots+10946^3$ の上 7 桁は？

2 乗は有名ですね。(右図[11]の通り、長方形になるように正方形をくっつけていけばいけます)



3 乗の場合は三次元的になにか出来るのかな？と考えて作った問題です。みんな一度は考えたことがありそうですが問題として見たことがなかったので出題しました。結局三次元的な何かを用いて解く解法は思いつきませんでした。思いついた方は教えてください。

まずフィボナッチ数を書き出してみます。

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946

算数の 1/2+1/6+1/12+1/20+1/30+…みたいな考え[12]ができないか考えてみます。

$1^3+1^3+2^3+3^3+5^3+8^3+\cdots$を残すので 2 個足し 1 個引くみたいな形にしたいです。

11 http://kk-online.jp/math007.html の画像を使わせていただきました。

12 (1/1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+(1/4-1/5)+(1/5-1/6)+…

実験してみると…

$1^3+1^3-0^3=2$ (3番目)

$2^3+1^3-1^3=8$ (6番目)

$3^3+2^3-1^3=34$ (9番目)

$5^3+3^3-2^3=144$ (12番目)

$8^3+5^3-3^3=610$ (15番目)

$13^3+8^3-5^3=2584$ (18番目)

$21^3+13^3-8^3=10946$ (21番目)

………

$6765^3+4181^3-2584^3=$？？ (57番目)

$10946^3+6765^3-4181^3=$？？ (60番目)

(求める値)$+6765^3-4$

フィボナッチ数が出てきました。そこで3の倍数番目の和を求めたいのですが、2=1+1,8=3+5,34=13+21,としていくとフィボナッチ数60番目までの総和が求まれば良さそうです

☆番目までの和を列挙してみると…

2,4,7,12,20,33,54,88,143,232…

またフィボナッチ数ですね[13]

フィボナッチ数列の62番目の値が必要です[14]…

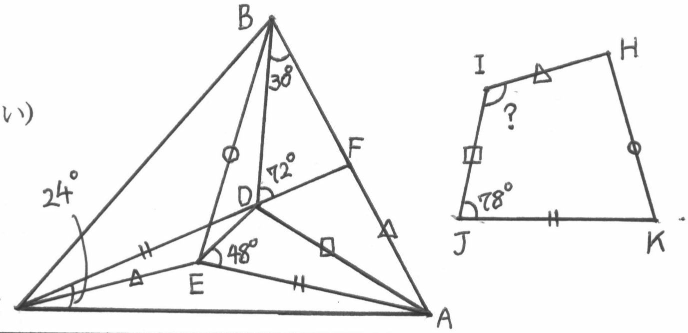
答は1716768です。

次の問題は誰にも解かせない問題として出したのですがノート7ページ近くの三角関数による計算で解かれてしまいました。ショックです。

2015 $\boxed{13}$

∠JIH＝？

(全て求めてください)



四角形HIJKがへこみのない四角形であることを書くのを忘れていました[15]。「全て求めてください」は同一法[16]の暗示のつもりでした。小学生ならば、これと合同だから～みたいな議論で全く問題ないかと。

どんな感じでこの問題を作ったのか書いていこうと思います。

離れた長さの等しい辺の条件がいっぱい与えられて角度を求めるみたいな問題を作

---

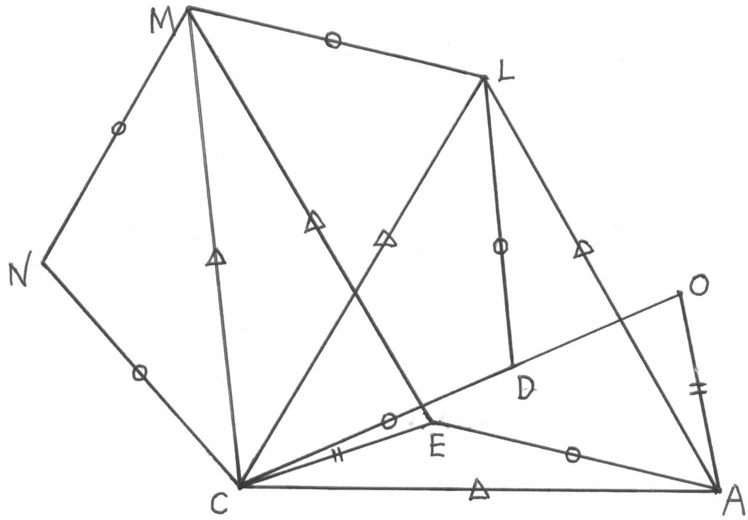
[13] 厳密には-1ですが

[14] 計算でも求まりますがそれだと最初から全て計算した方が早いと思います(悪問)　作問者からのひとことに○○番目のフィボナッチ数を調べるのはOKとか書くべきでしたね…

[15] 点Gがどこに消えたかは僕もよくわかっていません

[16] 図が一意に定まることを示して、仮定と結論を満たす図を構成する証明法です。今回の場合図の一意性を示すのが少し大変。まず角度が求まっている三角形AFCを固定します。Eを中心Cで半径AFの円上を動かした時、それぞれに対しCD=AEなるDをとると∠AED=48°となるEは一つであること示せばよいです。そういえば同一法を用いればMorleyの定理が算数で示せることを2014年の小学生向け講義でやったのですが覚えている人いるかな…

りたいなーと思い、正五角形と正三角形や正方形や正九角形を組み合わせていろいろやっていて出来た図が次です。(正五角形と組み合わせたのは等しい長さの対角線が離れた長さの等しい辺の条件にしやすいかなーと考えたからです。)



正五角形 CDLMN と正三角形 CAL から始めます。四角形 ALME が平行四辺形となるように E をとると等辺が上図のようにたくさん。さらに二等辺三角形の対称性より(ラングレーでも頻出の議論です)∠DAL=∠DAC=30°…①が得られます。△EMC は頂角 24°の二等辺三角形です。∠DCA が 24°なので△OCA がこれと合同なように O をとってみると CE=OA と離れた長さの等しい辺が出来ます。ここで OA=OF となるように CD 上に F をとると①より∠CAF=∠FAD=24°…②

直線 ED と直線 AB,BD のなす角がそれぞれ 90°,60°なので、

AF と LD の交点 B をとって、ED 上の P を△BDP が正三角形となるようにとりたくなります。②より P,O,A は一直線上です。

角度計算より

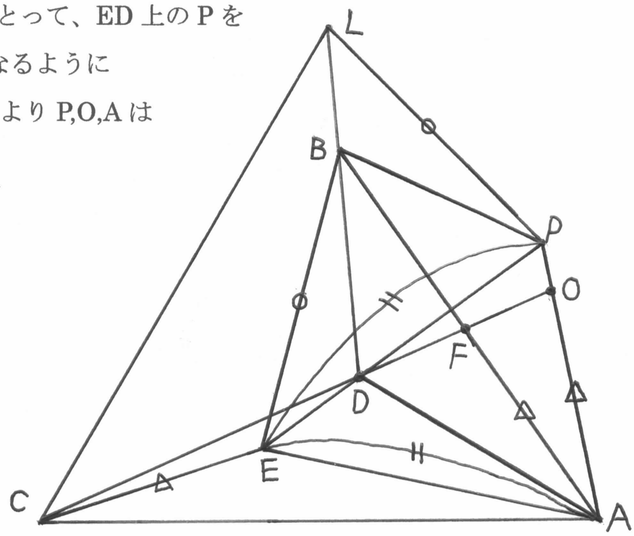
EP=EA=DL…③

よって BL=DE

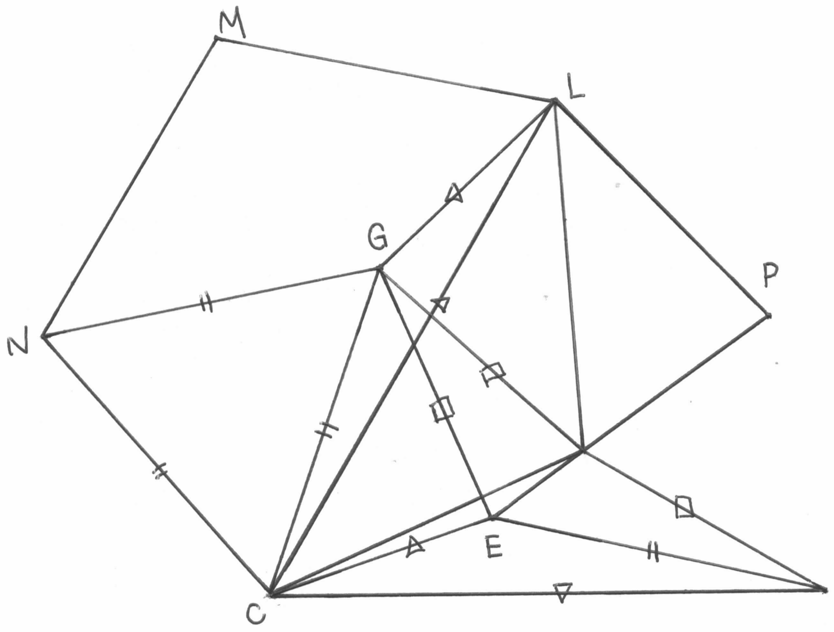
よって

△BDE≡△PBL

BE=PL…④



A,B,C,D,E,F を与えて LP(=BE),EP(=EA)を含む四角形を見つけ出す問題が出来そうです。E,L,P までの距離が A~F のみの図の中に現れている点を見つけます。
下図のように三角形 GNC が正三角形となるように G をとってみると問題文の四角形 HIJK は四角形 LGEP として現れていることが分かります。答は 108° です。



2013 $\boxed{2}$ 620 万以下の 2013 の倍数を全て書く。それらの各々の数の各位について偶数と奇数どちらが何回多く書いたでしょう？

総数も求まるので偶数の数を問えば良かったなーと思いました。各桁で比較していきます。この問題のポイントは、13×77=1001 です。下 3 桁は 013,026,039,…988 からそれぞれ 1 ずつ増えていきます。40×2013×77=6200040 です。この 40 というのは結構嬉しいです。色々やってみてください。答は偶数が 24 個多いだった気がします。

2015 $\boxed{3}$ どのような異なる？個の自然数をとってもその中から和が 2015 の倍数となるように奇数個取り出すことが出来る。(最小値を求めてください)

答えは 4029 です。4029 以上が必要なことは 2015 で割って 1,2014 余るのを 2014 個ずつ用意すれば分かります。十分なことの証明はバリバリの数学でした…

最後の尻すぼみ感が凄いですが、以上が僕が去年までに出題した7 問でした。今年1 日目に2 問、2 日目に1 問作ったので計10 問出題しました。小学生の頃から入試模試に問題を出したいと思っていたので満足です。

僕の場合作問が下手なので上のように成功することは少なく、ほとんどが没になるので作問時間は100 時間は軽く超えていると思います。なので、解く際も、ちょっと解けなくても諦めずじっくり考えてみてください。

3. 編集のうらがわ

入試模試担当者は前の担当者によって任命されます。仕事は以下の3 つです。

① 催促

一番大事です。サブリミナル効果を期待してしつこくすることが重要です。

② 問題のチェック

問題に間違い(問題の図が成立しない、数学的エラーがあるなど)がないか、自明解がないか確認します。改題出来そうなら作問者にそのアイデアを伝えます。

③ 清書

入試模試は伝統として方眼用紙に手書きで書いています。まず鉛筆で書いてみてレイアウトを決め、その後もう一度ボーレペンで書き直します。結構大変です。

4. まとめ

最後の失速は時間がなかったからです。すみません。もうこれで部誌、入試模試も書くことはないのだなぁと思うと嬉しいような悲しいような…

数研に属していて何か数学的なことをしたのかというとNo ですが、数研にいて楽しかったです。ここまで読んでいただきありがとうございました。

（お絵かきスペース）