数学オリンピックの幾何について

黒田直樹

高校 3 年 3 組 18 番

1　はじめに

本日は数学研究部にお越し頂きありがとうございます. 灘高等学校 3 年の黒田です. まず, この記事は, 数学オリンピックに挑戦している中高生向けになっております.

筆者は, 中学一年の頃からずっと数学オリンピックに挑戦し続けています. そんな筆者ですが, 特に幾何が得意分野であり, 数学オリンピックの対策として, 9 割方幾何の問題を解いていました.

数学オリンピックは, 組み合わせ, 整数論, 代数, そして幾何の 4 分野から, 偏りがないように出題されます. その中でも, 幾何の問題は, 他の 3 分野に比べ問題を解く上で助けとなる知識がたくさんあり, その分対策が反映しやすい分野だと思います. 実際, 筆者も幾何の問題を鬼のように解きまくって幾何を得意分野にしてから, 数学オリンピックで良い成績を残すことが出来るようになりました.

しかしながら, 自分で問題を探し, 解くというのはハードルの高いことだと思います. そのため, この記事では, 幾何の問題を解く上でためになる知識や, 幾何の良い問題を紹介しようと思います. 注意点としては, この記事では, 中学高校の教科書にのっているような基礎的な幾何の知識 (円周角の定理, 五心の存在, 根軸, 正弦定理など) を仮定しています. また, art of problem solving というサイトに, 多くの外国のコンテストの問題が載っているので, もし良ければ参考にしてみてください.

構成としては, 最初に, 長さ計算, 複素座標, 幾何の有名構図, の 3 つにセクション分けし, その後に, 海外のコンテストで出た幾何の良問を載せています. 紙面の都合上, かなり高度な内容になっており, 読むのに苦労する部分もあるかもしれませんが, その代わりに, この部誌に載っている内容を使いこなせるようになれれば, 数学オリンピックの幾何の問題も, かなり対処できるようになるのではないかと自負しております. もしこの記事を読んでためになったというのがあれば, 嬉しい限りです.

2 長さ計算

長さ計算というのは, 問題の示す条件を長さの条件に言い換え, 三角関数, 調和点列などを用いて文字を用いてその条件式を示すのが主な手法となります.

例えば次の問題を見てみましょう.

例． 鋭角三角形 ABC があり, 外心を O とする. 直線 AO は辺 BC と点 D で交わっており, 点 E と F を, それぞれ辺 AB, 辺 AC 上に, A, E, D, F が同一円周上にあるようにとる. この時, 線分 EF を辺 BC に射影した時の像の長さは, E, F の位置に依存せず一定であることを示せ. $(CGMO2002-6)$

この問題は, 初等幾何で解こうとすると厳しいでしょう (射影した像の長さというのは初等だとかなり厳しい). その代わり, 長さを計算しようとすると (実際この方針が, この問題だと自然だと思いますが), かなり少ない計算量で, 楽に解くことが出来ます. この問題は後で解法も含めて紹介しようと思いますが, 一般的に計算することのメリットは, このように「ほぼいつでも一定のやり方で解ける」ことだと思います. その中でも, 後で紹介する複素座標と違い, この長さ計算は汎用性が高く, いろんな問題にも応用しやすいものだと思います. 以後 (ここでいうのは微妙ですが), である調を用いています. ご了承ください.

2.1 三角形関連

この小節では, 三角形に関する話をし, 角度の条件を長さの条件に言い換えるのに重要な命題を紹介する.

命題 2.1. 三角形 ABC について, 点 D が辺 BC 上にあった時,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD}$$

証明は, 三角形 ABD と ACD の面積比が $BD:CD$ になることから簡単に出来る.

これをチェバの定理と組み合わせることで, 次の定理を得る.

定理 2.2. 三角形 ABC があり, 辺 BC, 辺 CA, 辺 AB 上にそれぞれ点 D, E, F がある.

この時, AD, BE, CF が一点で交わることと

$$\frac{\sin\angle BAD\sin\angle CBE\sin\angle ACF}{\sin\angle CAD\sin\angle ABE\sin\angle BCF} = 1$$

が同値である.

長さを計算すると, しばしば角度の sin が長さ計算の過程で登場するので, 一点で交わることを示す系の問題は, この問題を使うと良いことも多い. また, この定理から等角共役点の存在が示せる.

また, 命題 2.1 を用いて, 次の系が示せる.

系 2.3. 三角形 ABC について, 点 D, E が辺 BC 上にあり, $\angle BAD = \angle CAE$ が成り立っている時,

$$\frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

証明は, 上の命題を D, E に対して用いて, 二つの式を掛け合わせることに得られる.

次に, 円が絡んだ構図を紹介する.

命題 2.4. 四角形 $ABCD$ が円に内接していて, 二つの対角線が点 E で交わっている時,

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC}$$

この命題も, 三角形 ABC と三角形 ADC の面積比を考えれば, (円に内接するという条件から角 B と角 D が補角の関係になり, sin の値が一致することから) 題意の式が得られる.
今までの命題を用いて, 次の幾何の定理を示してみる.

定理 2.5. 円 ω とその外部の点 X があり, X から ω への二本の接線の接点を B, C とし, 円上に点 A を, 直線 BC に関して X と逆側にとる. (実際はこの条件は必要ない. 角 A が鈍角の時もほぼ同様に出来る.) 線分 BC の中点を M とする. この時,$\angle BAM = \angle XAC$ となることを示せ.

証明 . 直線 AX と辺 BC の交点を D とする. この時, $BX = CX$ より,

$$BD : CD = \triangle ABX : \triangle ACX = AB \cdot BX \cdot \sin\angle C : AC \cdot CX \cdot \sin\angle B = AB^2 : AC^2$$

これより, 系 2.2 を用いて, 目的の式を得る. ■

上の条件の時, 直線 AX を, 三角形 ABC の頂点 A の**疑似中線 (Symmedian)** と呼ぶ.

この直線にもいろいろな性質がある. 例えば, この疑似中線と円 ω の交点のうち A でないものを D とすると,

$$\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

が成り立つ.(これは $BD : CD = AB^2 : AC^2$ と命題 2.3 から言える.)

つまり, 円上の 4 点 A, B, C, D について, 直線 AD が三角形 ABC の頂点 A の疑似中線であることと, $AB \cdot CD = AC \cdot BD$ が同値となる.

これをまとめて, 次を得る.

命題 2.6. *四角形 $ABCD$ が円に内接している.(先ほどの例と点の並びが違うことに注意せよ) この時, 次の 5 つの条件は同値である.*

$(a) AB \cdot CD = BC \cdot DA$

$(b) AC$ は三角形 DAB の頂点 A の疑似中線

$(c) AC$ は三角形 BCD の頂点 C の疑似中線

$(d) BD$ は三角形 ABC の頂点 B の疑似中線

$(e) BD$ は三角形 CDA の頂点 D の疑似中線

このような四角形を, **調和四角形**と呼ぶ. なぜ調和と付くのかは, 調和点列の部分で解説することにする.

いろいろ話を進めてきたが, 一度戻り, 例題の解法を述べることにする.

証明 . 例題の解法

4 点 A, E, D, F を通る円と辺 BC の交点のうち, D でないものを T とする.

すると, 方べきの定理より,

$$BT \cdot BD = BE \cdot BA, CD \cdot CT = CF \cdot CA$$

を得る. 簡単のため, $BC = a, CA = b, AB = c$ と書くと, $\angle BAD = 90^\circ - \angle C, \angle CAD = 90^\circ - \angle B$ より, $BD : CD = c\cos C : b\cos B$ よって,

$$\frac{BD}{c\cos C} = \frac{CD}{b\cos B} = \frac{BC}{c\cos C + b\cos B}$$

を得る.

E, F から辺 BC への垂線の足を X, Y とすると, 示すことは, XY が E, F に依存しない (三角形 ABC のみによって決まる) 値になることだが,

$$\begin{aligned} BX + CY &= BE\cos B + CF\cos C \\ &= \frac{BT \cdot BD\cos B}{c} + \frac{CT \cdot CD\cos C}{b} \\ &= \cos B\cos C\left(\frac{BD}{c\cos C} \cdot BT + \frac{CD}{b\cos B} \cdot CT\right) \\ &= \cos B\cos C \cdot \frac{BC}{c\cos C + b\cos B} \cdot BC \end{aligned}$$

となり, これより $XY = BC - BX - CY$ は三角形 ABC のみによって決まることが分かり, 題意は示された. ■

初等幾何の華麗な解法と違ってつまらない解答ではあるが, 解き方も一本道で, 計算だと簡単に解ける問題だろう. このように計算がしやすい条件だとこのようにシンプルに計算することが出来るが, 実際には計算の仕方も工夫しなければならないことが多く. この問題のように単純にはいかない. 例えば以下の問題を見てみよ.

例 . 四角形 $ABCD$ が円に内接しており, 三角形 ABC, BCD, CDA, DAB の内接円の半径を, それぞれ r_1, r_2, r_3, r_4 とおく.
この時, $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$

この定理は, 任意の円に内接する多角形は, どんな三角形分割に対しても, 内接円の半径の和は一定であると言い換えられる.
かなり主張の綺麗な問題であるが, 実際に数学オリンピックで出てきたら困惑するのではないだろうか. 初等幾何で証明するのは大変難しいだろう (実際筆者も初等幾何で証明出来る気がしない) が, 長さ計算ならコンテスト中に終わる程度の計算量で終わる. この問題も, 後で触れることにする.

三角形関連で, スチュアートの定理というものを紹介する.

定理 2.7. スチュアートの定理
三角形 ABC があり, 辺 BC 上に点 D がある. この時,

$$BC(AD^2 + DB \cdot DC) = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB$$

証明 . 余弦定理を $\angle ADB$ と $\angle ADC$ に用いると, $\cos\angle ADB + \cos\angle ADC = 0$ となることから,

$$\begin{aligned}
AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB &= DC(AD^2 + DB^2) + DB(AD^2 + DC^2) \\
&= (DB + DC)(AD^2 + DB \cdot DC) \\
&= BC(AD^2 + DB \cdot DC)
\end{aligned}$$

となり, 目的の式を得る. ■

D が BC の中点の場合, 両辺を $\frac{BC}{2}$ で割ることで, 次の定理を得る.

系 2.8. 中線定理
三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を M とする. この時,

$$2(AM^2 + MB^2) = AB^2 + AC^2$$

最後に, 内接円の半径の長さの話をする.

命題 2.9. 直径 1 の円に内接する三角形 ABC に内接する円の半径は,

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

証明は,

$$\frac{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C(=R)}{\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)(=s)}$$

を愚直に計算すると出来るが, 証明は省略する.

練習問題 1. この命題を証明せよ.

他にも,

$$\begin{aligned}\text{三角形の面積} &= \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\\ &=\frac{abc}{4R}=sr=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

$$OI^2=R^2-2Rr(\text{内心での方べきを計算すると得られる.})$$

くらいは頭に留めておくといいだろう.

証明 . 例の解法

AB,BC,CD,DA の円周角をそれぞれ $2\theta_1, 2\theta_2, 2\theta_3, 2\theta_4$ とすると, 命題 2.9 より, 示すべき式は,

$$\begin{aligned}&\sin\theta_1\sin\theta_2\sin(\theta_3+\theta_4)+\sin\theta_3\sin\theta_4\sin(\theta_1+\theta_2)\\ &=\sin\theta_2\sin\theta_3\sin(\theta_1+\theta_4)+\sin\theta_1\sin\theta_4\sin(\theta_2+\theta_3)\end{aligned}$$

だが, この式は加法定理を用いることで容易に示せる. ■

2.2 練習問題

紙面の都合上解答は省いた. 大体難易度順に並んでいるので, 各自解いてみよ.

1. 三角形 ABC があり, 辺 BC, 辺 CA, 辺 AB 上にそれぞれ点 X, Y, Z がある. また, 三角形 XYZ について, 辺 YZ, 辺 ZX, 辺 XY 上にそれぞれ点 D, E, F がある. また, 三直線 AX, BY, CZ, XD, YE, ZF はそれぞれ一点で交わる.
この時, 三直線 AD, BE, CF も一点で交わることを示せ.

2. 平面上に三角形 ABC と直線 γ があり, 点 P が γ 上にある, 直線 PA を γ に関して対称移動したものを A' とし, B',C' も同様に定義する.

この時, A', B', C' は一直線上にあることを示せ. (USAMO 2012 5)

3. 線分 XY を直径とする円上に, X, A, B, C, Y がこの順にあり, $\angle AXB = \angle CXY$ が成り立っている. 線分 AY と線分 XB,XC の交点を, それぞれ P, Q とする. この時,

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{AY}{AX}$$

が成り立つことを示せ. (USAJMO 2013 5)

4. 鋭角三角形 ABC があり, 辺 AC の中点を M とする. B と M を通る円と辺 AB, 辺 BC がそれぞれ点 P, Q で交わっているとする. 点 T を, 四角形 $BPTQ$ が平行四辺形となるようにとる. T が三角形 ABC の外接円上にあるとする. この時,$\frac{BT}{BM}$ のとりうる値を求めよ. (IMO shortlist G4)

5. 三角形 ABC があり, 角 A の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とする. 直線 M, N を, B,C から直線 AD への垂線の足とする. 線分 MN を直径とする円と辺 BC との交点を X,Y とする.
この時, $\angle BAX = \angle CAY$ となることを示せ. (Sharygin 2013)

おまけ (長さ計算は関係ない. 難しいが, 是非解いてみよ) 上の問題について, 三角形 AXY の外接円と三角形 ABC の内接円が接することを示せ.

2.3 調和点列, 円関連

数学オリンピックに出てくる幾何の問題は, 基本的には三角形か, 円に内接する四角形が 出てくる (最近は例外も多いですが,).
そのため, この 2 ケースについて勉強していれば, 大体の問題には対処できるだろう.
その円関連の話に, 調和点列が深く関わっており, その知識を知ることによって, 長さ計算をする上で非常に手助けとなるので, 始めに紹介しておく.

定義 2.10. 同一直線上の 4 点 A, B, C, D について,

$$\frac{\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}}$$

をこの 4 点の**複比**といい, $(A, B; C, D)$ で表す.
また, $(A, B; C, D) = -1$ なる同一直線上の 4 点 A, B, C, D を 調和点列 と呼ぶ.

長さに向きを考慮することに注意せよ. (単純に線分の長さを掛けるだけではなく, 符号も考慮する必要がある.)

一般的に, 調和点列は, ある線分を同じ比に内分, 外分する点だと考えれば良い.

定義よりすぐに,

$$(A,B;C,D)=(B,A;C,D)^{-1}=(A,B;D,C)^{-1}=(C,D;A,B)$$

が分かる.

また, 今後直線と直線の交点を考える上で平行な直線で場合分けするという煩雑さを除くため, 平行な二直線は, 無限遠点 と呼ばれる点で交わるとする. この時複比の定義中に 長さ無限のベクトル/長さ無限のベクトル という式が出てくることがあるが, これは便宜上, 大きさを 1 とすることにする.

例えば, 等間隔の 3 点とその直線の無限遠点を合わせた 4 点は, 調和点列をなす.

また, $\angle(l,m)$ で, l を反時計回りに何度回したら m になるか (符号付き角度) を表すと, 直線上にない点 P について,

$$(A,B;C,D)=\frac{\sin\angle(PA,PC)/\sin\angle(PC,PB)}{\sin\angle(PA,PD)/\sin\angle(PD,PB)}$$

が成り立つ. (命題 2.1 を用いることで, 辺PAなどが全て相殺され, 題意の式が得られる.)

定義 2.11. *二直線 l,m およびそのいずれの上にもない点 P について, l 上のすべての点 X を直線 SX と m の交点に対応させる写像を l から m への S を中心とする配景写像と呼ぶ.*

この時, 上の性質が直線のなす角にのみ依存することから, 配景写像によって複比を保つことが分かる.

より, 特に円上の 4 点 A,B,C,D について複比を定義できる. すなわち, 円 ω の任意の点 P と P を通らない任意の直線 l について, 直線 PA,PB,PC,PD と l との交点 4 点の複比を, 円上の 4 点の複比と定義し, $(A,B;C,D)$ と表記する. また, $(A,B;C,D)=-1$ となる円上 4 点 A,B,C,D について, 四角形 $ACBD$(円上ではこの順に並んでいることに注意せよ) を 調和四角形 と呼ぶ.

この四角形が命題 2.6 で言及したものになっていることは, 正弦定理により円周角の sin が辺の長さに比例していることを用いると分かる.

例 . 三角形 ABC について, 点 D,E,F が辺 BC,CA,AB 上にあって AD,BE,CF が一点 P で交わっている.

直線 EF と直線 BC, AD との交点を X,Y(無限遠点の可能性もある) とすると,

$(B,C;D,X)=-1$(チェバ, メネラウスの定理を組み合わせる)
$(A,P;Y,D)=-1$(Eでの背景写像を前の式に用いる) また, 角 A の内角, 外角の二等分線と直線 BC との交点を M,N とすると,
$(B,C;M,N)=-1$

調和点列の長さ計算への応用はどういうところかというと, $(A,B;C,D)=-1$ なる同一直線上の 4 点について, 線分 CD の中点を M とすると, $AB\cdot AM=AC\cdot AD, BA\cdot BM=BC\cdot BD, MB\cdot MA=MC\cdot MD=MC^2$ という式が成り立つことである. (証明は,$AC=a(a-b), AB=b(a-b), AD=a(a+b)$ と文字でおき計算すると出来る.)

例．円 ω の弦 BC と DE が A で交わっている. 直線 BC と平行で D を通る直線と円 ω が点 F で交わっており, 直線 FA と円 ω との交点を T とする. 直線 ET と BC の交点を M とし, $AM=MN$ なる直線 AM 上の点を N とする.
この時, 三角形 DEN の外接円は BC の中点を通ることを示せ.

証明．以下の式の角度は有向角を表す (tex で有向角の記号が見つからなかったので, 紛らわしいですが注意してください.).

$$\angle MAT=\angle BAT=\angle DFT=\angle DET=\angle MAE$$

より, $MA^2=MT\cdot ME=MB\cdot MC$ となるので, 上の調和点列についての長さの性質を用いて, B,C,A,N は調和点列をなす. よって線分 BC の中点を K とすると,

$$AK\cdot AN=BA\cdot AC=AD\cdot AE$$

となり, 方べきの定理の逆より示された. ■

定義 2.12. 中心が O, 半径が r である円 ω および O でない点 A に関して, 半直線 OA 上にあって $OA\cdot OB=r^2$ を満たす点 B を通り, OA に垂直な直線 l を, A に関する ω の 極線 と呼ぶ, また, A を直線 l の 極 と呼ぶ.

P の極線上に Q があるとき, Q の極線上に P があることが分かる (問 このことを示せ.)
円 ω とその外部に点 P があり, 直線 PX,PY が ω に接し, 直線 AB,CD 上に点 P があるように 6 点 A,B,C,D,X,Y をとる.
この時, 直線 XY は P の極線となることが簡単に分かる.
また, 四角形 $AXBY$ は調和四角形になることから, これの X から直線 AB への配景写像を考えることによって, 直線 XY と AB の交点を点 Q とすると, 4 点 A,B,P,Q は調和点列をなす. Q の取り方より, Q は P の極線上にあるので, 極線と調和点列が深く関係していることが分かる.

同様にして直線 XY と CD の交点を R とすると, $(A, B; P, Q) = (C, D; P, R) = -1$ より, 直線 AC と BD,AD と BC の交点を E,F とすると, E,F の配景写像を上の式について考えることで, E, F は直線 QR 上にあり, 特に E, F は P の極線上にあることが分かる.

調和点列に関する話についてはこれくらいにする. 調和点列は, 近年よく用いられる手法の一つであり, これを用いることによって出来る問題も数多くあるが, 紙面の都合上省略する. 興味のある方はより詳しく調べてみれば良いだろう.

これをもとに, 円がらみの話をする. 基本的には方べきの定理と上の調和点列の長さ関連の話を使うことになるのだが, 一つ面白い定理がある,

定理 2.13. 円上に 4 点 A, B, C, D がこの順に時計回りにあり, 直線 AB と CD,AD と BC の交点をそれぞれ E, F とすると,

$$EF^2 = EA \cdot EB + FA \cdot FD (E \text{ の方べきの値} + F \text{ の方べきの値})$$

証明 . 簡単な角度計算により, 三角形 EAD, EBC, FAB, FCD の外接円は, 全て直線 EF 上のある 1 点を通る (非常に重要なので, 必ず覚えておくべき知識だろう. 知らなかった人は頭に入れておくとよい.) この点を G とすると,

$$EF^2 = EG \cdot EF + FG \cdot FE = EA \cdot EB + FA \cdot FD$$

■

基本的にこれらの知識を知っておけば十分だろう, 幾何の問題は, 与えられた 4 点の共円や, 三直線が一点で交わる, 3 点が一直線上にあることを示すものがほとんどであるが, いずれも方べきの定理の逆, メネラウス, チェバの定理でうまく長さの問題に帰着できれば, 長さ計算が出来る可能性が高い.

特に, 4 点の共円を示す問題において, そのうち 2 点を通る直線 2 つの交点が単純な点であれば, 方べきの値を計算する方針を試してみてもいいだろう.

例 . 鋭角三角形 ABC があり, BE,CF を垂線とする. A, F を通り直線 BC に接する 2 つ円と直線 BC との接点を, P, Q(B は線分 CQ 上にあるようにとる) とする.

この時, 直線 PE と QF は三角形 AEF の外接円上で交わることを示せ. (IMO2008shortlistG4)

P,Q の扱いが非常にめんどうな問題である, 角度も出ないため, $BP^2 = BQ^2 = BF \cdot BA$ という式を用いて長さ計算するのが自然だろう.

証明 . 条件が成り立つことと $\angle CEP = \angle BFQ$ が同値であり, $\angle BFQ = \angle BQA = \angle CQA$ なので, 4 点 A, Q, P, E の共円を示せば良いが, 直線 BE と

CF は三角形 AEF の外接円上 (三角形 ABC の垂心) で交わるので, 定理 2.13 より,

$$CP \cdot CQ = BC^2 - BP^2 = (CE \cdot CA + BF \cdot BA) - BF \cdot BA = CE \cdot CA$$

より題意は示された ■

このように, 初等幾何で言い換える過程がそこそこ非自明なものも多い. 問題をみたら, まず問題を簡単なものに言い換えたり, 反転など, 様々なことを試してみると良いだろう.

2.4 練習問題

これで長さ計算をする上で助けとなる知識は紹介しつくしただろう, 長さ計算の恩恵を知るため, 一つ数学オリンピックの中でも指折りの難問である幾何の問題を, 長さ計算を用いて解いてみる.

例 . 三角形 ABC が円 ω に内接しており, ω と共有点を持たない直線 l がある. ω の中心から l への垂線の足を P とする, 直線 BC,CA,AB が直線 l とそれぞれ X, Y, Z で交わってるとする. この時, 三角形 AXP, BYP, CZP の外接円は, P と異なるある一点を通るか, 全て P で接することを示せ. (IMO2012shortlistG8)

ショートリストらしい主張の綺麗な問題であるが, 手が出ない難問だろう. とりあえず P を通る円があるので P で反転したくなるが, そこからも非自明なところが多いだろう.

証明 . P で反転すると, 三角形 BCP の外接円と直線 l との交点で P でないものを D とし, E,F も同様に定義したときに, AD, BE, CF が一点で交わることを示せば良いことが分かる.

ω の中心を O, 半径を r とすると, $XP \cdot XD = XB \cdot XC = OX^2 - r^2 = PX^2 + OP^2 - r^2$ より, $PX \cdot PD = PX \cdot (XD - XP) = OP^2 - r^2 (> 0)$ を得る. (点の位置は, P が D,X の間にある.) この右辺は A, B, C などに依存しない値であり, これを k とする.

示すことは,

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD}(\text{有向角である})$$

をサイクリックに掛けたものが -1(符号が変わることに注意せよ) になることだが,

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD} = \frac{AY \cdot ZD}{AZ \cdot YD}$$

であり, (直線 l 上の線分については, 符号付き長さを考えている) 三角形 ABC と直線 l に対するメネラウスの定理と,

$$DY = PY - PD = -\frac{k}{PE} + \frac{k}{PX} = -\frac{k}{PE \cdot PX} EX$$

をサイクリックに掛け合わせることでこの式が得られる. ■

どうだろう, 長さ計算の恩恵が分かっただろうか.

以下が練習問題である, 先ほどと同様に大体難易度順に並んでいる.

1. 鋭角三角形 ABC があり, D, E, F を A, B, C からの対辺への垂線の足とする. 三角形 BDF, CDE の内心を I_1, I_2 とする. この時, 4 点 B, C, I_1, I_2 は同一円周上にあることを示せ.

2. 鋭角三角形 ABC があり, A, B, C から対辺への垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. 2 点 B, F を通り線分 AD と接するような円を考え, その円と線分 AD の接点を X とする. XB, XC の中点をそれぞれ Y, Z とする. この時, A, Y, D, Z は同一円周上にあることを示せ.

3. $AB < AC$ かつ $\angle A = 90°$ なる直角三角形 ABC があり, 角 A の内角の二等分線, 外角の二等分線と直線 BC との交点をそれぞれ D, E とする. 三角形 APQ の外接円と直線 AB との交点のうち, A でないものを F とする. この時, $FD = FE$ が成り立つことを示せ.

4. 直線 AB,CD が平行な台形 $ABCD$ の対角線が点 P で交わっている. B を通り直線 AC と A で接する円を ω_1, C を通り直線 BD と D で接する円を ω_2, 三角形 BPC の外接円を ω_3 とする.

この時, ω_1, ω_3 の根軸と ω_2, ω_3 の根軸は直線 AD 上で交わることを示せ. (Iran TST 2017)

5. どの 2 辺の長さも等しくない三角形 ABC があり, 内心を I とし, 内接円が辺 BC と点 D で接しているとする. A を含まない弧 BC 上に点 X があり, X から直線 BI, CI への垂線の足を E, F とし, 線分 EF の中点を M とする. この時, $MB = MC$ が成り立っているならば $\angle BAD = \angle CAX$ となることを示せ. (Iran TST 2014)

3　複素座標

複素座標とは, 頂点を複素数で表し計算する手法である.

直交座標と比べ, 一つの点の座標の変数が一つのため, 式が複雑になりにくく, 角度が非常に簡単に表せる (複素数を割ることで偏角が出る).

また, 直交座標の場合と比べ因数分解がしやすい (これは後述の例で分かるだろう). というのがメリットである.

複素座標の欠点として, 円が非常に扱いづらい. 円 1 個程度なら全く問題ないが, 円が複数個あると複素座標の計算はまず無理である. そういうときは初等幾何で言い換えたり, 反転で円を消したりするのを試すのが良いだろう.

3.1 基本

円の式 : $|z-a|=k$

直線の式 : $az+b\bar{z}=c(a,b,c$ は複素数, k は非負実数)

この二つが超基本となる式である. 円の式は $|z-a|=k$ とは書いたものの, 実際には $|z|=1$ を用いるのがほとんどである. (他のケースは式が非常に複雑になってしまうので, 現実的ではないだろう) 以下, 最も幾何の問題としてメジャーな, 「三角形 ABC が円に内接してる」ケースについて様々な話をする.

命題 3.1. $A(a),B(b)$ が単位円 $|z|=1$ 上にある時,

直線 $AB : z+ab\bar{z}=a+b$

直線は, 通る 2 点を決めると一意に定まる. $\bar{a}=\frac{1}{a}$ などを使うと, この直線上に A,B があることを確認できる.

命題 3.2. $az+b\bar{z}=c$ と $az-b\bar{z}=d$ は直交する.

x が $az+b\bar{z}=c$ にあることと $ix+e$ が $az-b\bar{z}=d$ を満たすことが (e の値をうまく調整すれば) 同値になることから得られる.

以下の命題中の式は簡単な計算で分かるので, 解説は省略する. 各自手を動かしてみよ.

命題 3.3. $A(a),B(b),C(c)$ が単位円 $|z|=1$ 上にある時,

C から直線 AB への垂線 : $z-ab\bar{z}=c-\frac{ab}{c}$

C から直線 AB への垂線の足 : $\frac{a+b+c-\frac{ab}{c}}{2}$

三角形 ABC の垂心 : $a+b+c$

単位円での A の接線 : $z+a^2\bar{z}=2a$

A の接線と B の接線の交点 : $\frac{2ab}{a+b}$

命題 3.4. $|z|=1$ 上にある点 $A(a)$ と上にない点 $P(p)$ について, 直線 AP と単位円の交点を $B(b)$ とすると,

$b=\frac{a-p}{a\bar{p}-1}$

直線 $AB : z + ab\bar{z} = a + b$ 上に点 P がくることから求める式を得る.

次に, 内心関連の話をする. 角の二等分線関連は複素座標とあまり相性が良くない. そのため, 内心関連は, 二乗などを用いた以下の形を用いることが多い.

命題 3.5. 三角形 ABC があり, 内心を I, 角 A,B,C 内の傍心を I_A, I_B, I_C, 三角形 ABC の外心を O, 三角形 ABC の外接円と直線 AI, BI, CI の交点を D, E, F とすると, うまく複素数 a, b, c を選ぶことにより,

$A(a^2), B(b^2), C(c^2)$

$I(-ab-bc-ca), I_A(ab-bc+ca), I_B(ab+bc-ca), I_C(-ab+bc+ca)$

$O(0), D(-bc), E(-ca), F(-ab)$, 三角形 ABC の外接円 : $|z| = 1$

と座標を置くことが出来る.

証明は省略する. コンテスト中ではこの事実を証明なしに用いても問題ない.

また, 共円などの言い換えも, 複素座標なら, 偏角をもちいて簡単に言い換えられる.

命題 3.6. 相異なる 4 点 $A(a), B(b), C(c), D(d)$ が同一円周上にあることと,

$$\frac{b-d}{a-d} \div \frac{b-c}{b-a} \in \mathbb{R}$$

が同値である.

このように書くと, 位置関係によって場合分けする必要もなく, かなり便利に扱える.

命題 3.7. 相異なる 4 点 $A(a), B(b), C(c), D(d)$ に対し, 三角形 ABC の外接円の C での接線上に点 D があることと,

$$\frac{d-c}{a-c} \div \frac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R}$$

が同値である.

実数であることは共役がもとの複素数と等しいことと同値なので, これによって複素座標で計算することが出来る.

複素座標をやる上で必要な知識は, これでほとんどである. 複素座標の強みを知るため, いくつか例を上げよう.

例 . 三角形 ABC の内接円と九点円が接することを示せ.

証明 . 命題3.5 より, 九点円の中心を N とすると,

$A(a^2), B(b^2), C(c^2), O(0), I(-ab-bc-ca), N(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2))$

とおける．今外接円の半径 $R=1$ なので，示すことは $NI=\frac{1}{2}-r$ であり，$1-2r=R-2r=R(R-2r)=OI^2$ であることから，$2NI=OI^2$ を示せば良いが，

$$\begin{aligned}2NI&=|(a+b+c)^2|=|a+b+c|^2=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\\&=(ab+bc+ca)(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})\\&=|ab+bc+ca|^2=OI^2\end{aligned}$$

より示された．■

上のは華麗な問題だが，次にかなり汚いが，複素座標を使ってなんとか解ききれる問題を紹介する．

例． 三角形 ABC があり，内心を I とする．この時，三角形 AIB, BIC, CIA, ABC のオイラー線は一点で交わることを示せ．

A,B,C に対して対称性があるので，式は複雑だが，計算量は少なくてすむ．

証明． 命題3.5の置き方をする．三角形 BIC の外心は $-bc$，重心は $\frac{1}{3}(b^2+c^2-ab-bc-ca)$ なので，差が $\frac{1}{3}(b+c)(b+c-a)$ であることから，

$$\text{三角形 } BIC \text{ のオイラー線} : (ab+bc-ca)z+ab^2c^2(a-b-c)\bar{z}=b^2c^2-a^2bc$$

となることが分かる．（この式を (i) とする.)（一般に 0 と a を通る直線は $\bar{a}z-a\bar{z}=0$ なので，与えられた2点を通る直線を求める時には，差をとって左辺を求めたあと，代入して右辺を求めるのが良い.)

対称性よりこの式の a,b を入れ替えたもの（この式を (ii) とする）と元の式を連立させて z を求める．

$((i)-(ii))\div c(a-b) : 2z+abc(a+b+c)\bar{z}=-(ab+bc+ca)$

$(i)+(iii)\cdot bc : (ab+bc+ca)z+2a^2b^2c^2\bar{z}=-abc(a+b+c)$

この式を順に $(iii),(iiii)$ とおく．これらの式は a,b,c について対称なので，これより前者3つの三角形のオイラー線は一点で交わる．

$(iii),(iiii)$ から簡単に

$$z=\frac{-abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-4abc}$$

となることが分かり，これより z が $a^2+b^2+c^2$ の実数倍になっていることが分かり，これが三角形 ABC のオイラー線上にあることが分かり，題意は示された．■

最後に, 長さ計算と合わせて難問を解く.

例 . 正三角形でない三角形 ABC があり, 内心を I とし, I_A を角 A 内の傍心とする. 直線 BC を軸として I_A を対称移動した先の点を I'_A とし, 直線 AI'_A を直線 AI を軸として対称移動させた直線を l_A とする. 同様にして l_B も定義し, 点 P を l_A と l_B の交点とする.
$a.$ 点 O を三角形の外心とした時, 点 P は直線 OI 上にあることを示せ.
$b.$ P から三角形 ABC の内接円への接線の一つと三角形 ABC の外接円の交点を X, Y とした時, $\angle XIY = 120°$ となることを示せ. (*IMO2016 shortlist G7*)

内心や傍心が出てきており, 円も一つなので, a に関しては複素座標を使ってみるとうまくいく. (当然初等幾何でも出来るが) b に関しては 120° を複素座標で言い換えるのはかなりつらいので, 長さ計算で示す.

証明 . 命題3.5の置き方をする. この時, $I_A(ab+ac-bc)$ より, $z+b^2c^2\bar{z} = b^2+c^2$ と, $z-b^2c^2\bar{z} = (ab+ac-bc)-(\frac{b^2c+bc^2}{a}-bc)$ との交点

$$\frac{(ab+ac-bc)+b^2+bc+c^2-\frac{b^2c+bc^2}{a}}{2}$$

が $I_AI'_A$ の中点となるので, $I'_A\left(b^2+bc+c^2-\frac{b^2c+bc^2}{a}\right)$ を得る. l_A は I'_A を直線 AI で折り返した点 I''_A を通る. 同様にして

$$I''_A\left(\frac{-a^3(b+c)+a^2(b^2+2bc+c^2)-b^2c^2}{bc}\right)$$

となり,

$$a^2-\frac{-a^3(b+c)+a^2(b^2+2bc+c^2)-b^2c^2}{bc} = \frac{(a-b)(a-c)(ab+bc+ca)}{bc}$$

から,

$$\text{直線 } l_A : (a+b+c)z-a^3(ab+bc+ca)\bar{z} = a^3-abc$$

を得る. a, b を入れ替え直線 l_B を出し, 交点を求めることで,

$$P\left(\frac{-abc}{a+b+c}\right)$$

を得る.

$$\overline{\frac{-abc}{a+b+c}}\cdot(-ab-bc-ca) = 1$$

より, P は点 I を三角形 ABC の外接円で反転した先となり, $a.$ は示された.

三点 P, X, Y について反転することで O, I, X, Y の共円が分かるので, 示すことは, 直線 $\angle XOY = 120°$, つまり O と直線 XY との距離が $\frac{R}{2}$ となることであるが, I と直線 XY との距離は r であり,

$$PI : PO = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} - \sqrt{R^2 - 2Rr} : \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} = 2r : R$$

より題意は示された. ■

3.2 練習問題

複素座標で計算する上で必要な知識は少ないものの, 問題を見て計算量の少ない方法で座標をおいたり, またこの問題はこの方法で計算しきれるかを判断するには慣れが必要である. 以下の練習問題は複素で計算しきれることは分かっているが, 大体後にいくほど複雑なものになっている. どう座標を置けばいいかを考えながら手を動かすのが良いだろう.

1. $AB \neq AC$ なる三角形 ABC が円 ω に内接しており, A を通り BC に平行な直線と ω の交点を D, A から BC への垂線の足を E, 三角形 ABC の重心を G とした時, $DG : GE$ を求めよ.

2. 三角形 ABC が円 ω に内接しており, ω の中心を O とする. A, B, C から対辺への垂線と ω との交点を D, E, F, O を直線 BC, CA, AB で折り返した点を O_A, O_B, O_C とする. この時, 直線 DO_A, EO_B, FO_C は ω 上のある一点を通ることを示せ.

3. 三角形 ABC が円 ω に内接しており, 垂心を H とする. A, B, C とも異なる点 X が円 ω 上にあるとする. この時,X の三角形 ABC に関するシムソン線 (各辺に下ろした垂線の足を結ぶ直線) 上に線分 XH の中点があることを示せ.

4. 鋭角三角形 ABC があり, $AB > BC$ かつ $AC > BC$ が成り立っている. 三角形 ABC の外心, 垂心をそれぞれ O, H とする. 三角形 AHC の外接円と辺 AB の交点を M, 三角形 AHB の外接円と辺 AC の交点を N とする. この時, 三角形 MNH の外心は直線 OH 上にあることを示せ. (APMO 2010 4)

5. 三角形 ABC があり, 内心を I とし, 内接円と辺 BC, CA, AB との接点を D, E, F とする. D から直線 EF への垂線の足を M とし, 線分 DM の中点を P とする. 三角形 BIC の垂心を H としたとき, 直線 PH は線分 EF の中点を通ることをしめせ. (Iran TST 2009 9)

6. 円に内接する四角形 $ABCD$ において, 直線 AC と BD が点 E で, AD と BC が点 F で交わっているとする. 線分 AB,CD の中点をそれぞれ G, H とする. この時, E,G,H を通る円は直線 EF に点 E で接することを示せ. (IMO2009 shortlist G4)

7. $ABCD$ が円 ω に内接する四角形であり, P は直線 AC 上の点であって, 直線 PB および直線 PD は ω に接する. ω の点 C での接線は直線 PD と点 Q で交わり, 直線 AD と点 R で交わる. 直線 AQ と ω の交点のうち A でない方を E とする. この時, 3 点 B, E, R は同一直線上にあることを示せ. (APMO 2013 5)

8. 三角形 ABC があり, 内心を I とし, 内接円と辺 BC, CA, AB との接点を D, E, F とする. D から直線 EF への垂線の足を K とし, 線分 DK の中点を M とする. 三角形 AIB, AIC の外接円と内接円がそれぞれ C_1, C_2, B_1, B_2 で交わっているとする.

この時, 三角形 BB_1B_2 の外接円と三角形 CC_1C_2 の外接円の根軸は, M を通ることを示せ. (TSTST 2016 6)

4 有名構図

このセクションでは, 最近の幾何の問題によく出ており, 知っておくと力になる知識を紹介する.

4.1 回転相似

回転相似とは, ある一点を中心に拡大縮小や, 回転移動をすることである. この一点を回転相似の中心とする.

線分 AB,CD があり, 直線 AC,BD が点 X で交わっている.

この条件のもとで, 線分 AB を CD にうつす回転相似の中心 O がどんなものになるかを考える.

この時三角形 OAB,OCD が相似であることから, 三角形 OAC,OBD も相似になり, $\angle OAC = \angle OBD$, $\angle OCA = \angle ODB$ となり, 簡単な角度計算により O, X, A, B, O, X, C, D は同一円周上にある. これより, O の位置は, 三角形 XAB, XCD の外接円の交点のうち X でないもの (ただし, X で互いに接している時は X) と一意に定まる.

ちなみに, 複素座標だと, $A(a), B(b), C(c), D(d)$ としたときに $O\left(\frac{ad-bc}{a+d-b-c}\right)$ と定まる.

例． AB と CD が平行でない四角形 $ABCD$ があり, その内部に, $EA = EB$ かつ $EC = ED$ なる点 E がある．この時,

$$\angle FAD = \angle FBC = \frac{1}{2}\angle CED, \angle FDA = \angle FCB = \frac{1}{2}\angle AEB$$

なる点 F が存在することを示せ.

証明． 線分 AB と DC の回転相似の中心を O とし, AB が DC に移る回転相似での E の行き先を G とする． 三角形 OAB,ODC が相似なので, OAE と $OF'E$,OBE と $OF'D$ が (同じ向きに) 相似になるような点 F' があり, この時三角形 $AF'D$ と ECG,$BF'C$ と EDG が相似になり, 示された. ■

問題で出る時は, 三角形 ABC があって D, E が辺 AB, AC 上にあり, 三角形 ABC,ADE の外接円の交点をとると言ったものに回転相似の概念を用いることが出来る. 例えば, この交点を P とすると, $PB : PC = PD : PE = BD : CE$ となり, $BD : CE$ は求めやすい事が多く. これによって長さ計算などに帰着したりできる.

4.2 練習問題

1. 四角形 $ABCD$ があり, 辺 AD,BC 上に, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ なる点 E, F がある．半直線 FE が半直線 BA,CD と点 S,T で交わっている．この時, 三角形 SAE, SBF, TCF, TDE の外接円は全てある一点を通ることを示せ. (USAMO 2006 6)

2. $AB \neq AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, 垂心を H とし, 辺 AB の中点を M とする．点 D, E を, それぞれ辺 AB, AC 上にあり, $AD = AE$ かつ D, H, E が同一直線上にあるようにとる．この時, 三角形 ABC,ADE の外接円の共通弦と直線 HM は直交することを示せ. (IMO2005 Shortlist G5)

3. 四角形 $ABCD$ は円 ω に内接しており, 直線 AB と CD, AD と BC がそれぞれ E, F で交わっているとする．円 ω と三角形 AEF, 三角形 CEF の外接円がそれぞれ $G(\neq A), H(\neq C)$ で交わっているとした時, 直線 AC, BD, GH は一点で交わることを示せ. (ELMO 2014 Shortlist)

4. 三角形 ABC があり, 辺 BC, CA, AB 上に点 A_1, B_1, C_1 がある．三角形 AB_1C_1,ABC の外接円の交点で A でないものを A_2 とし, A_1 を辺 BC の中点で折り返した点を A_3 とする．同様にして B_2, C_2, B_3, C_3 を定義する．この時, 三角形 $A_2B_2C_2$ と $A_3B_3C_3$ は相似であることを示せ. (IMO2006 shortlist G9)

4.3　辺を線形に動く

個人的にはこの小節が最も最近の幾何の問題を解く効果的な方法だと思っている. 題名だけ見ると意味不明に思えるかもしれないが, 次の命題を見てみよ,

命題 4.1. (同じ向きに) 相似な三角形 ABC,DEF があり, G, H, I がそれぞれ AD, BE, CF を同じ比に内分しているとする. この時, 三角形 GHI もこれらの三角形と相似である.

証明は, 上の回転相似の中心の概念を使うとできる. つまり, AB と DE の回転相似の中心 P をとると, ABC と DEF が相似であることから, この回転相似によって三角形 ABC は DEF にうつる. (特に, このようにして相似な 2 つの三角形の回転相似の中心を考えられるのは覚えておくと良い.) この時, 三角形 PAD,PBE,PCF はいずれも相似であり, これらにおいて G, H, I は対応する点であることから, 三角形 GHI も ABC と相似になることが分かる.

今は内分の場合だが, 外分の場合も同様に出来る. この命題が示唆しているのは, 「相似な三角形 2 つがあった時, 対応する頂点を結ぶ線分それぞれを 1 次的に移動していっても, 相似という関係は保たれる」ということである. 分かりにくいだろうか, では次の例を見てみよう.

例 . どの辺も等しくない鋭角三角形 ABC があり, そのオイラー線に A から下ろした垂線の足を D とする. 中心が点 S の円 ω が点 A, D を通っており, 辺 AB, AC と点 X, Y で交わっている. A から辺 BC への垂線の足を P, 辺 BC の中点を M とした時, 三角形 XSY の外心は P, M から等距離にあることを示せ. (IMO2016 Shortlist G5)

複雑な問題に思えるかもしれないが, よく考えると XSY は頂角 $2\angle A$ の二等辺三角形であり, 命題 4.1 が使えそうな形である.

証明 . AE が ω の直径になるように点 E をとると, 点 D の取り方から E はオイラー線上にあることが分かる.

X, Y は点 E から辺 AB, AC への垂線の足であることから, X, Y は, 点 E をオイラー線上で動かしたときに線形に動いていくことが分かる. 三角形 XSY の外心を T とすると, 三角形 XTY は E, X, Y などに依存せず必ず頂角 $4\angle A(360° - 4\angle A)$ の二等辺三角形になるので, X, Y が線形に動くことから, T もある直線上を線形に動くことが分かる.

求めることはこの軌跡が線分 PM の垂直二等分線となることであり, E がある 2 点の時にこの直線上に乗るこを示せれば良い.

E が三角形 ABC の外心の時, X, Y は線分 AB, AC の中点となり, 線分 XY,PM の垂直二等分線は一致することから $TM = TP$ を得る.

E が三角形 ABC の外心の時, 簡単に T が九点円の中心になることがわかり, P, M が九点円上にあることから $TM = TP$ を得る. よって示された. ■

どうだろう, この方針を知ると, 見通しも変わってきたのではないだろうか, 次にもう一つ別の命題を紹介する.

命題 4.2. 半直線 AX,AY があり, 半直線 AX, AY 上の点 B, C を, 実数 m, n, 正の実数 k があって $mAB + nAC = k$ が成り立つように動かす.

この時, 三角形 ABC の外接円は A 以外の定点 Z を通る.

証明 . 条件を見たすような点 B_1, C_1, B_2, C_2 をとってきて, 三角形 AB_1C_1,AB_2C_2 の外接円の交点 Z をとる. この時, 簡単な角度計算により三角形 ZB_1C_1, ZB_2C_2 は相似となるが, B,C は B_1B_2, C_1C_2 を線形な関係に動いていくことから, $(mAB_1 + nAC_1 = mAB_2 + nAC_2 = mAB + nAC)$ 三角形 ZBC もこれらと相似になり, これより簡単な角度計算で Z, A, B, C が同一円周上にある. ■ (特に, $\sin\angle XAZ : \sin\angle ZAY = n : m$ が成り立っている. (ここでの角度は有向角である.))

4.4 練習問題

1. 三角形 ABC があり, D が辺 BC 上にある. 三角形 ACD の外接円と辺 AB の交点のうち A でないものを E, 三角形 ABD の外接円と辺 AC の交点のうち A でないものを F とする. D が辺 BC 上を移動した時, 三角形 AEF の外接円は, A と線分 BC の中点を結ぶ直線上の, A 以外のある定点を通ることを示せ. (ELMO 2013 shortlist G3)

2. 三角形 ABC があり, 辺 BC 上を点 D が動いている. 点 E, F を, 辺 AB, AC 上に, それぞれ $BE = CD, CF = BD$ なるようにとる. 三角形 BDE,CDF の外接円の交点のうち D でないものを点 P とする. この時, ある定点 Q があり, QP の長さが一定になることを示せ. (China TST 2018)

3. 三角形 ABC があり, 辺 BC と内接円, 角 A 内の傍接円との接点をそれぞれ X_A, Y_A とし, 同様にして X_B, X_C, Y_B, Y_C を定義する. この時, 三角形 $X_AX_BX_C$ と三角形 $Y_AY_BY_C$ が相似になるような三角形 ABC としてありうるものを全て求めよ.

4. $\angle A < \angle B$ かつ $\angle A < \angle C$ なる三角形 ABC があり, 辺 AB, AC 上に $BD = CE = BC$ なる点 D, E がある. 三角形 ABC の外心を O, 内心を I とした時, 直線 OI と直線 DE は直交することを示せ.

5. 凧 ($XY = XW$ かつ $ZY = ZW$ なる四角形 $XYZW$) でない凸四角形 $ABCD$ が円に内接しており, 対角線が H で直交してるとする. 線分 BC, CD

の中点を M, N とし, 半直線 MH, NH がそれぞれ辺 AD, AB と点 S, T で交わっているとする. この時, 四角形 $ABCD$ の外部に,

·半直線 EH が$\angle BES, \angle TED$ を二等分している.

·$\angle BEN = \angle MED$

を満たすような点 E があることを示せ. (USA TST 2018 5)

6. 鋭角三角形 ABC がある. 辺 AC 上の点 E と辺 AB 上の点 F の組 (E, F) が以下の条件をみたすとき 面白い 組であるという:

線分 EF の中点を M, 線分 EF の垂直二等分線と直線 BC の交点を K とし, 線分 MK の垂直二等分線と直線 AC, AB の交点をそれぞれ S, T としたとき, 4 点 K, S, A, T は同一円周上にある.

2 つの組 $(E_1, F_1), (E_2, F_2)$ がいずれも面白いとき, $\frac{E_1E_2}{AB} = \frac{F_1F_2}{AC}$ が成り立つことを示せ. (IMO2014 Shortlist G6)

4.5 他いろいろ

様々な性質を述べるが, 証明は略する. 興味があれば各自手を動かしてみよ.

命題 4.3. 鋭角三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を M とし, 垂心を H とする. H から直線 AM への垂線の足を P とすると, $AM \cdot PM = BM^2$ が成り立つことを示せ. (JMO 2011 1)

命題 4.4. 鋭角三角形 ABC が円 ω に内接しており, B,C から対辺への垂線の足を D, E, 垂心を H, 辺 BC の中点を M とし, 線分 AA' が ω の直径になるように点 A' をとる. この時, H, M, A' はこの順に等間隔に同一直線上にあり, また直線 $A'M$ と円 ω との交点は, 三角形 ADE の外接円上にある.

命題 4.5. 直線上の 3 点 A, B, C と直線上にない点 P があった時, 三角形 PAB,PAC,PBC の外心と P は同一円周上にあることを示せ.

命題 4.6. 凸四角形 $ABCD$ があり, 点 P, Q, R, S が辺 AB, BC, CD, DA 上にある. 線分 PR,QS が点 O で交わっている. この時, 四角形 $APOS$,$BQOP$,$CROQ$,$DSOR$ が内接円を持つならば, 四角形 $ABCD$ も内接円を持つ.

命題 4.7. 三角形 ABC において, 内部に P があり, その等角共役点を Q とする. この時, P, Q から各辺への垂線の足 6 点は同一円周上にあり, その中心は線分 PQ の中点になることを示せ. (九点円の存在もこれにより示せる.)

命題 4.8. 凸四角形 $ABCD$ があり, これは内接円を持つとする. 三角形 ABC, ADC の内心を I_1, I_2 とすると, 直線 I_1I_2 と直線 AC は直交することを示せ.

5 好きな問題

様々なことをこの部誌で紹介してきたが, やはり幾何の問題をとにかく解きまくるのが, 幾何が得意になるための王道でしょう.

そのため, 上の手法など関係なく, 個人的に好きな良問を, 難易度順に上げていきます. 有名どころから外したところから出題してるので, 是非とも解いてみてください.

1. どの 2 辺の長さも等しくない三角形 ABC が円 ω に内接しており, 垂心を H, 辺 AB の中点を M とする. C を含まない弧 AB 上に, $\angle ACP = \angle BCQ < \angle ACQ$ なる点 P, Q をとる. H から直線 CQ, CP への垂線の足を R, S とする. この時, P, Q, R, S は点 M を中心とする円上にあることを示せ. (IZhO 2017 1)

2. 四角形 $ABCD$ が円に内接しており, 辺 AB 上に点 P がある. 対角線 AC と線分 DP は点 Q で交わり, P を通り CD に平行な直線, Q を通り BD に平行な直線が, 辺 BC の B 側 に延長した部分とそれぞれ点 K, L で交わっているとする. この時, 三角形 BKP の外接円と三角形 CLP の外接円は互いに接することを示せ. (RMM 2018 1)

3. 円上に, 5 点 A, B, C, D, E が時計回りにあり, 直線 AC と BD が点 P で交わっており, $AE = DE$ が成り立っているとする. 直線 AB 上にあって $AQ = DP$ を満たし, A が線分 BQ 上にあるような点 Q をとる. 同様に直線 CD 上にあって $DR = AP$ を満たし, D が線分 CR 上にあるような点 R をとる.

この時, 直線 PE と QR は直交することを示せ. (Canada 2018 2)

4. 三角形 ABC はどの二つの辺の長さも等しくない. 内心を I とし, 内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とする. 辺 BC の中点を M とし, Q を, 内接円上にあって $\angle AQD = 90^\circ$ となるようにとる. 点 P を, 三角形内部かつ直線 AI 上にあり, $MD = MP$ を満たすようにとる. この時, $\angle PQE$ と $\angle PQF$ のどちらかは 90° であることを示せ. (USA TST 2015 1)

5. 三角形 ABC が円 Ω に内接しており, P が三角形内部という条件を満たしながら動く. 半直線 AP, BP, CP と Ω との交点を $A_1.B_1, C_1$ とし, A_1 を辺 BC を軸として対称移動させた点を A_2 とし, B_2, C_2 も同様に定義する.

この時, 三角形 $A_2B_2C_2$ の外接円は, 必ず P に依存しないある定点を通ることを示せ. (Bulgarian Olympiad 2012)

6. 三角形 ABC があり, 直線 DB, DC が三角形 ABC に接するように点 D をとる. 直線 AC を軸に点 B を対称移動させた点, 直線 AB を軸に点 C を対称移

動させた点をそれぞれ B', C' とする．三角形 $DB'C'$ の外心を O とすると, 直線 AO と直線 BC は直交することを示せ. (ELMO 2016 2)

7. 三角形 ABC が円 ω に内接しており, 内心を I, $\angle A$ 内の傍心を I_A とする. 辺 BC と内接円,$\angle A$ 内の傍接円との接点をそれぞれ D, E とし, A を含まない弧 BC の中点を M とする．直線 BC と D で接し, 弧 BAC と T で接するような円がある．直線 TI と ω が S で交わるとする．この時,SI_A と ME は ω 上で交わることを示せ. (ELMO 2010 6)

8. 四角形 $ABCD$ 内に点 P があり,

$$\angle BPC = 2\angle BAC, \angle PCA = \angle PAD, \angle PDA = \angle PAC$$

が成り立っている．この時, $\angle PBD = |\angle BCA - \angle PCA|$ を示せ．(Iran TST 2017)

9.　三つの円 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ と直線 l があり, 直線 l はこの 3 つの円にそれぞれ A, B, C で接しており, ω_2 は残り 2 つの円に外接している. ω_1, ω_3 の共通外接線のうち l でないものと, ω_2 が X, Y で交わっているとし, B を通り l に垂直な直線が ω_2 と Z で交わっているとする．この時, 直線 ZX, ZY は線分 AC を直径とする円に外接することを示せ. (Iranian Geometry Olympiad 2017 4)

10. 三角形 ABC が円 Ω に内接しており, Ω 上に点 X, Y があり, 直線 XY と辺 AB, AC が点 D, E で交わっている．この時, XY, BE, CD, DE の中点は同一円周上にあることを示せ. (ELMO shortlist 2010 G6)

11. 三角形 ABC があり, 外心を O とする．三角形 ABC の内部に, $\angle BAP = \angle CAP$ なる点 P をとる．P から辺 BC, CA, AB への垂線の足をそれぞれ D, E, F とする．三角形 DEF の外接円が, 直線 BC と点 D と異なる点 K で交わるとする．この時, O, P, K は同一直線上にあることを示せ.

6　あとがき

とても長くなりましたが, かなりの力作が仕上がったと思います．私が知っている幾何のエッセンスは全て詰め込んだつもりです.

私は, 小学生時代の算数オリンピックなども含めれば, 競技数学をかれこれ 10 年間近くやっており, 大学以降も数学オリンピックの生徒をサポートする立場になるだろうと思います．そのため, 数学オリンピックに興味のある方, そ

してすでに何回も参加しているものの, あまり解けたことがないという方に対して, この部誌が参考になっていただければ幸いです.

最近は幾何が対策されつづけたからなのか, (私みたいな幾何マニアが海外にもいるからなのでしょうか $\cdots$) 全く目新しい構図で, 分かりにくい点を言い換えていくというステップ数の多い問題が流行りですが, (上のいくつかの問題が 2017 年度の問題だったように,) この部誌で紹介した知識も最近の幾何の問題を解く上で有用なのは間違いない!! と思います. ここで言うのもなんですが, 数オリの代表を目指すようなレベルの高い人にも飽きない内容をと思って執筆した結果, この部誌の内容がとんでもなくハードなものになってしまったと思います. この部誌を全て理解し, ここで紹介した問題を自力で全て解ききったという方は, きっとほとんどの幾何の問題は対処できるようになっていると強く思います.

最後になりますが, ここまで読んでくださりありがとうございました.