偶・奇置換とあみだくじの関係について

中学３年　山中優輝

はじめに

本日は灘校文化祭にお越しいただき、ありがとうございます。
この記事では偶・奇置換の偶奇、その置換をあみだくじとしておいたときの横線の本数の偶奇との関連性について書いています。
初めて書く部誌であり、基本的な内容で先輩方と比べて圧倒的に簡単な内容ですが、息抜き程度に読んでもらえると幸いです。

偶置換と奇置換の定義のついて

集合 S から S 自身の上への一対一写像(全単射)　δ:S→S を S 上の置換という。
ここでは　Ω＝{1,2,⋯n}　の上での置換を考える。
Ω 上の置換 δ がΩの要素 1⋯ n をそれぞれ$a_1 \cdots a_n$にうつすとき、

$\delta = \binom{1,2,\sim,n}{a_1,a_2,\sim,a_n}$

と表す。
ここで、$a_1 \cdots a_n$は１～ n の順序を入れ替えただけなのでもちろん Ω 上の置換は全てで n!個あることになる。
これらの置換をすべて合わせて n 次の対照郡といい、S_nで表すことにする。
n 個の変数 D$(x_1 \sim x_n)$について、

$\prod_{1 \leq a \leq b \leq n}(x_a - x_b)$

を$x_1 \cdots x_n$の差積という。
置換 $\delta \in S_n$に対し、

δD＝∏(a ＜ b)　(Xδ(a)－Xδ(b))

とおく。

つまるところ、X_aをＸδ(a)と置き換えたものを δＤとおく。

このとき、差積が正ならばその置換を偶置換、負ならばその置換を奇置換という。

(例)

n＝3 の時…$\mathrm{D} = (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)(X_1 - X_3)$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}$の時、δＤ＝$(X_1 - X_2)(X_2 - X_3)(X_1 - X_3) = -\mathrm{D}$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$の時、δＤ＝$(X_1 - X_3)(X_3 - X_2)(X_1 - X_2) = \mathrm{D}$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$の時、δＤ＝$(X_2 - X_1)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3) = \mathrm{D}$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$の時、δＤ＝$(X_2 - X_3)(X_3 - X_1)(X_2 - X_1) = -\mathrm{D}$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$の時、δＤ＝$(X_3 - X_1)(X_1 - X_2)(X_3 - X_2) = -\mathrm{D}$。

$\delta = \binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$の時、δＤ＝$(X_3 - X_2)(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) = \mathrm{D}$。

偶置換は$\delta = \binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$、$\delta = \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$、$\delta = \binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$

奇置換は$\delta = \binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}$、$\delta = \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$、$\delta = \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$

一般的に Ｄ もδＤ も、変数$X_1 \dots X_n$のうちの異なる 2 つの差全体の積になっているので、符号の違いを無視すれば、これらは等しい、ということになる。

あみだくじの定義について

・上段の集合Ｓから始まり、常に下に向かって道を進み、下段に向かう。

・横線でつながった二本の縦線がある場合は、それぞれ他方の線に移る。

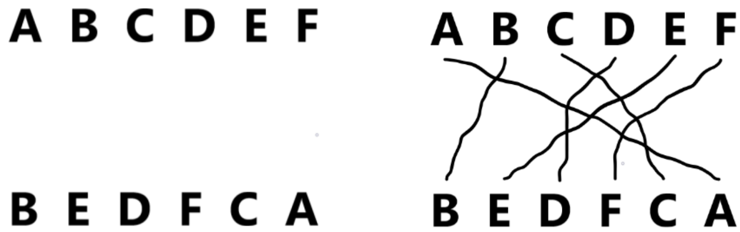
・横線でつなげることのできる縦線は必ず二本である。

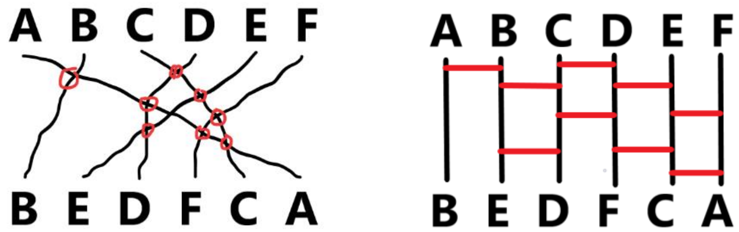
次に、縦線のみのあみだくじを『元のあみだくじ』とする。

また、同じ置換をするあみだくじは同一のものであるとみなす。

横線の本数をｍとし、その置換をするものの中でｍが最小であるものは、視覚的に容易に考えることができる。

（例）





また、二つの要素のみを交換する置換を『互換』といい、これはあみだくじの横線に相応する。

よって、m が最小であるものは、互換を最小の m 回行ったものと考えることができる。

（例）

（ABCD）→（BACD）→（BADC）→（BDAC）　　　計３回

あみだくじと置換の関係

あみだくじが全単射であることを示す。

【証明】

縦線 n 本、横線 m 本のあみだくじを考える。

m＝０の時…自明

ｍ＝ａの時…これが全単射であると仮定する。

この時、横線がａ本のこのあみだくじに横線を一本追加すると、局地的に互換が起こるだけなのでこれも全単射である。

よって、ｍ＝ａの時に ｍ＝ａ＋１のことが言えたので、数学的帰納法により証明された。∎

集合Ｓ上の任意の置換 f,g に対して g∘f もＳ上の置換であることを示す。

【証明】

x,y をＳの異なる２元とすると、f は単射なので、

$f(x) \neq f(y)$

が言える。

g も単射であるので、

$g(f(x)) \neq g(f(y))$

よって、

$g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$

が言えるので、g∘f は単射である。

次に g が全射であるので、g(w)=z となる w が存在する。

よって、f(x)=w となる元が存在することも同様に言えるので、

$g(f(x)) = g(w) = z$

が言えるので、g∘f は全射である。

よって、Ｓ からＳ への写像 g∘f は全単射であるので、g∘f はＳ上の置換である。∎

置換の偶奇と横線の本数の偶奇との一致について

Ω＝(1⋯ｎ)上の任意の置換ｆは互換$\boldsymbol{g_1} \circ \boldsymbol{g_2} \dots \boldsymbol{g_n}$として表されて、ｎの偶奇はｆによって一意的に決まることを示す。

【証明】

まず、恒等置換 e がいくつかの互換$h_1 \dots h_r$の合成関数

e=$k_1 \circ k_2 \dots k_r$

と表されたとすると偶数になることを示す。

まず、Ω の元 i が現れるk_iがあるとし、それらのうちで i が最大になるものを改めて

k_i=(1, α)（$\alpha \neq 1$）

とする。

ここで、i≠1 であることが言える。

何故ならば、仮にそうだとすると e≠ $k_1 \circ k_2 \dots k_r$において、右辺が e と異なるものになってしまうから。

逆に、i が恒等置換となるための条件は i より先に 1 が出てきていることであり、i は最大の数と仮定しているので、i≠1 である。

この時、k_iの前にするk_{i-1}の操作は

（ア)(1, α）　（イ)(1, β）　（ウ)(α, β）　（エ)(β, γ）

の 4 通り存在する。

このそれぞれにおいて、次の等式が成り立つことが言える。

（ア）$k_{i-1} \circ k_i = e$

（イ）$k_{i-1} \circ k_i = (1\beta) \circ (1\alpha) = (1\alpha\beta) = (1\alpha) \circ (1\beta)$

（ウ）$k_{i-1} \circ k_i = (\alpha\beta) \circ (1\alpha) = (1\beta\alpha) = (1\beta) \circ (\alpha\beta)$

（エ）$k_{i-1} \circ k_i = (\beta\gamma) \circ (1\alpha) = (1\alpha) \circ (\beta\gamma)$

この操作により、「１」と互換するものが前に移動する。

e = $k_1 \circ k_2 \dots k_r$

に上の(ア)～(エ)を代入したものを

e = $k'_1 \circ k'_2 \dots k'_s$

とすると、s は(ア)の時は r-2、それ以外だと r と等しくなる。

また、Ωの元 1 が現れるk_jに対しては$\mathrm{j} \leq \mathrm{i} - 1$が必ず成り立つ。

次に、先ほど得られた式に対しても同じ手順を踏み、それで得られた式に対しても同じことを繰り返す…、といったことをできる限り繰り返したものを

$e = g_1 \circ g_2 \circ \dots g_t$

とする。

ここでこのすべての互換g_iにΩの元は現れず、s と同様に、t と r の偶奇は一致する。

この動作を続けていけばいつか必ず右辺は e になることから、t が偶数であることが言え、t,r の偶奇が一致することから r も偶数である。

後は、f がいくつかの互換の合成とし

$f = h_1 \circ h_2 \circ \dots h_l = h'_1 \circ h'_2 \dots h'_m$

と 2 通りに表されたとすると、l+m が偶数であることを示せば l と m の偶奇は一致する。

上の等式の$h_1 \circ h_2 \circ \dots h_l, h'_1 \circ h'_2 \dots h'_m$の二つに

$h_l \circ h_{l-1} \circ \dots h_1$

をかけ、

$(h_l \circ h_{l-1} \circ \dots h_1)(h_1 \circ h_2 \circ \dots h_l) = (h_l \circ h_{l-1} \circ \dots h_1)(h'_1 \circ h'_2 \dots h'_m)$

となることから、先ほど得られたことから、l+m は偶数であることが言える。

よって、$\Omega = (1 \cdots n)$上の任意の置換 f は互換$g_1 \circ g_2 \dots g_n$として表されること、 n の偶奇は f によって一意的に決まること、の 2 つが示された。▮

あとがき

このようなタイプの証明はあまり書いたことがないので難しく、また、期限ぎりぎりにもかかわらず図の書き方がわからなくて PC で苦労しました。

結果として非常にバランスの悪いものになってしまいましたが、来年は計画的に取り組み、もう少しマシに書けるよう努力したいと思います。

参考文献

・線形代数への道　永田 雅宜

・線形代数 30 講　志賀 浩二