



**ODYSSEY**  
78TH NADA SCHOOL FESTIVAL

# Infinity

## \* 目次 \*

- 対称性をもつグラフの彩色多項式から導かれる整数論の定理について  
H3 中 洋貴
- 三角形に関する二種類の操作と相似三角形の出現  
H3 内田 侑里
- フラクタルについて  
H3 宮原 尚大

**第78回灘高文化祭**  
**数学研究部部誌**  
May 2-3, 2024



↓資料室



# 対称性をもつグラフの彩色多項式から導かれる整数論の定理について

灘高等学校 3年 中 洋貴

第 78 回灘校文化祭

## 1 はじめに

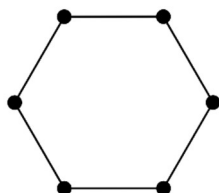
この記事では、対称性（回転対称性）をもつグラフについての彩色多項式を考えることで、整数論の定理を導いていきましょう。議論が厳密でないところがありますが、本質的なところには影響ないと思います。

## 2 今回使いまくる補題

この記事で導く全ての結果は、次の補題によって当たり前にも得られるものです。

**補題** 対称性がある  $n$  頂点グラフの頂点を塗り分ける方法のうち、 $\frac{360^\circ}{n} \times k$  ずつ回転させたとき、 $\frac{n}{k}$  回回転させて初めて元に戻る方法の数は  $\frac{n}{k}$  で割り切れる ( $k$  は正整数)。

用語がまともに定義されていないので、意味が伝わらないかもしれません。具体的に説明します。例えば、 $n=6, k=1$  の場合は、次のようなグラフの頂点に、一本の辺で繋がった頂点同士は異なる色になるように色を塗るような方法のうち、 $60^\circ$  ずつ回転させたとき、6 回回転させて初めて元に戻るような塗り方の数は、6 の倍数ということです。



## 3 彩色多項式の定義

このような、「グラフの頂点を塗り分ける方法の数」を扱いやすくしてくれる概念があります。それが、**彩色多項式**です。

グラフ  $G$  に対して、その頂点を、隣接する頂点が異なる色で塗られるように  $\lambda$  色で塗り分ける方法の数  $P(G, \lambda)$  は、 $\lambda$  に関する多項式として表せることが知られています。

これをグラフ  $G$  に関する**彩色多項式 (chromatic polynomial)** と呼びます。<sup>1</sup>

## 4 サイクルグラフの彩色多項式

ということで、まず、サイクルグラフを塗り分ける方法について考えます。サイクルグラフとは、上の図のような、一つの閉路からなるグラフのことです。 $n$  頂点のサイクルグラフ  $C_n$  の彩色多項式は以下のように表せることが知られています。

$$P(C_n, \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$$

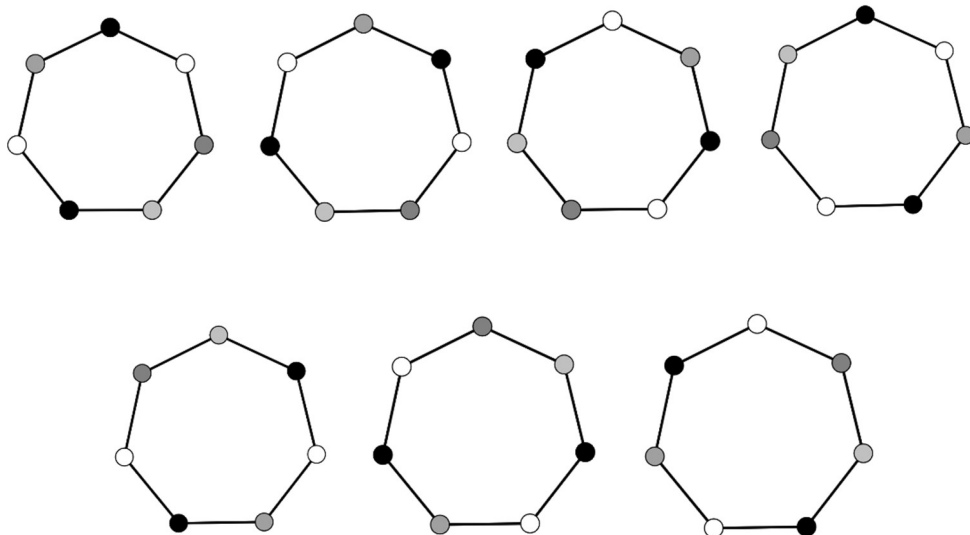
## 5 素数頂点サイクルグラフの彩色多項式から導ける整数論の定理

まず、補題を直接使える素数頂点サイクルグラフを扱います。

素数頂点サイクルグラフ  $C_p$  の塗り分け方の内、回転して一致するものを区別しないことにすると、その塗り分け方の個数は、

$$\frac{P(C_p, \lambda)}{p}$$

と表せます。なぜなら、回転して一致するものを区別する場合、以下の図のように、一つの「塗り方」に対して、ちょうど  $p$  回カウントされているからです。もし、これらの中に同じ配置が存在する場合、グラフが塗り分けられていることに矛盾します。

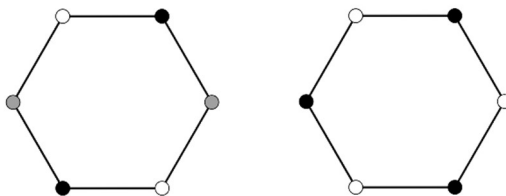


$p = 7$  の場合

---

<sup>1</sup> 彩色多項式は、いわゆる削除縮約公式によって再帰的に求めることができる、ということが知られています。

この性質は、頂点の数が素数だから成り立つものです。例えば、頂点の数が6の場合、次の図のような「塗り方」は、6回もカウントされません。



それぞれ3回、2回カウントされる

話を戻しましょう。回転して一致するものを区別しないことにしたときの塗り分け方の個数は、素数頂点サイクルグラフの場合、

$$\frac{P(C_p, \lambda)}{p}$$

になるのです。

この値は整数値をとるので、次の合同式が任意の $\lambda$ について成り立ちます。

$$(\lambda - 1)^p + (-1)^p(\lambda - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$p = 2$ であるとき、これは

$$(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1) \equiv 0 \equiv 2(\lambda - 1) \pmod{2}$$

つまり、

$$(\lambda - 1)^2 - (\lambda - 1) \equiv 0 \pmod{2}$$

と同値です。

また、 $p \neq 2$ であるとき、つまり $p$ が奇素数であるとき、上式は

$$(\lambda - 1)^p - (\lambda - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

と同値です。よって、任意の素数 $p$ と任意の整数 $a$ について、

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つことがわかります。これはフェルマーの小定理の主張を含みます。

## 6 一般のサイクルグラフの彩色多項式から導ける整数論の定理

さて、先ほどの考察を一般化しましょう。 $Q(C_n, \lambda)$ を「 $C_n$ を $\frac{2\pi}{n}$ ずつ回したとき、 $n$ 回目で初めて元に戻るような彩色の個数」と定義します。このとき、自然数 $n$ について以下が成り立ちます。

$$P(C_n, \lambda) = \sum_{i|n} Q(C_i, \lambda)$$

よって、 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{a_i}$  ( $p_i \in \mathbb{P}, a_i \in \mathbb{N}$ )とおいたとき、包除原理っぽく、

$$Q(C_n, \lambda) = P(C_n, \lambda) - \sum_{1 \leq i \leq m} P\left(C_{\frac{n}{p_i}}, \lambda\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq m} P\left(C_{\frac{n}{p_i p_j}}, \lambda\right) \dots + (-1)^m P\left(C_{\frac{n}{p_1 \dots p_m}}, \lambda\right)$$

と表せます。さらに、メビウス関数を用いると、

$$Q(C_n, \lambda) = \sum_{d|n} P\left(C_{\frac{n}{d}}, \lambda\right) \mu(d)$$

と表せます。ここで、補題より

$$Q(C_n, \lambda) \equiv 0 \pmod{n}$$

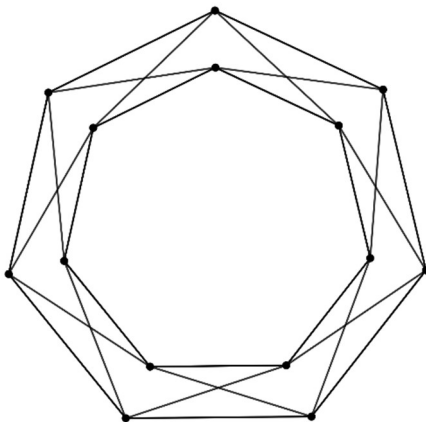
であることをふまえると、以下が成り立つことがわかります。

$$\sum_{d|n} P\left(C_{\frac{n}{d}}, \lambda\right) \mu(d) \equiv 0 \pmod{n}$$

これを整理することで、フェルマーの小定理の一般化とも言える式を得ることができます。

## 7 素数頂点サイクルグラフの亜種

補題は対称性のあるグラフなら適用できるので、以下のようなグラフの彩色多項式に整数を代入したときの値が7の倍数であることもわかります。これが補題に正整数  $k$  を登場させた意図です。



$n = 14, k = 2$  として、補題を適用できる

## 8 終わりに

今回は詳しく触れられませんでした。今後、上のようなグラフについても調べたいです。

# 三角形に関する二種類の操作と相似三角形の出現

灘高等学校 3年 中 洋貴

第 78 回灘校文化祭

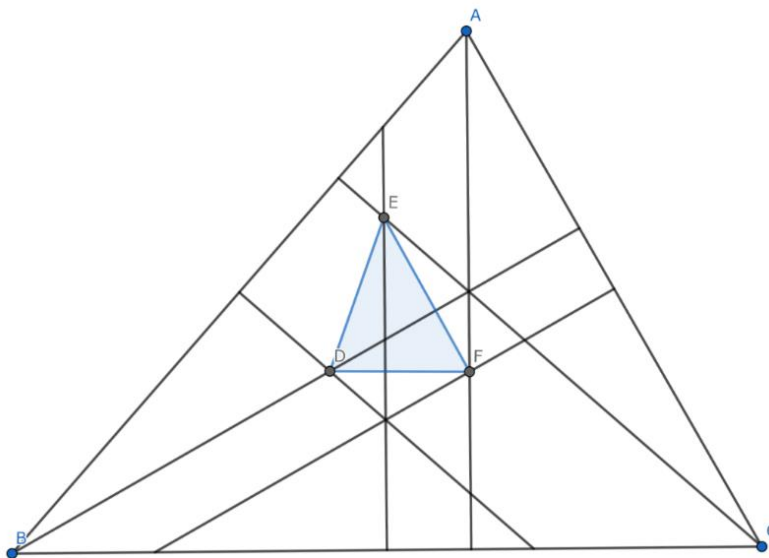
この記事では、よく似た二つの定理を紹介します。

## 1 一つ目の定理

まず、一つ目の定理の内容を紹介します。一つ目の定理の主張は以下の通りです。

- 1.1 **定理 1**  $\triangle ABC$  が正三角形ではないとき、 $B$  から  $AC$  に下ろした垂線と  $AB$  の垂直二等分線との交点を  $D$ 、 $C$  から  $AB$  に下ろした垂線と  $BC$  の垂直二等分線との交点を  $E$ 、 $A$  から  $BC$  に下ろした垂線と  $AC$  の垂直二等分線との交点を  $F$  とする。このとき  $\triangle ABC$  と  $\triangle DEF$  は相似である。<sup>1</sup>( $\triangle ABC$  が正三角形のとき、 $\triangle DEF$  は一点に退化する。)

図にすると次のようになります。



- 1.2 **系** 定理 1 と同様に、 $C$  から  $AB$  に下ろした垂線と  $CA$  の垂直二等分線の交点を  $G$ 、 $A$  から  $BC$  に下ろした垂線と  $AB$  の垂直二等分線の交点を  $H$ 、 $B$  から  $CA$  に下ろした垂線と  $BC$  の垂直二等分線の交点を  $I$  としたとき、 $\triangle ABC$  と  $\triangle GHI$  は相似である。

---

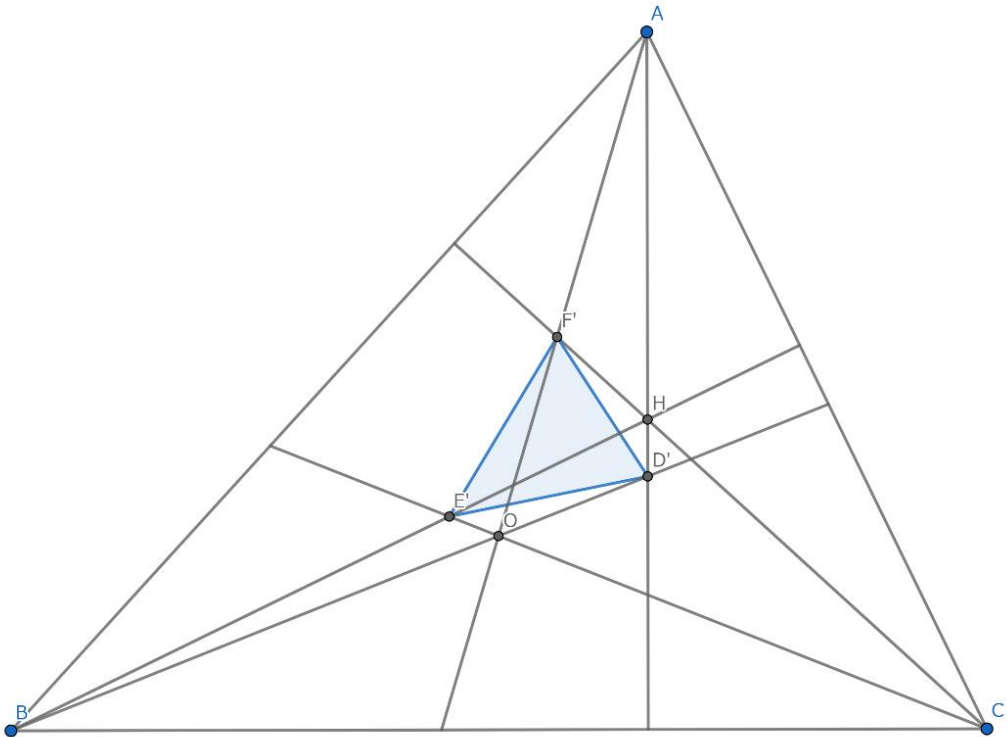
<sup>1</sup> 中 洋貴, 作図アプリで見つけた定理. 数学セミナー. 2020, 59(11), 56 頁

## 2 二つ目の定理

次に、二つ目の定理の内容を紹介します。二つ目の定理の主張は以下の通りです。

- 2.1 **定理 2**  $\triangle ABC$  が正三角形ではないとき、 $\triangle ABC$  の外心を  $O$ 、垂心を  $H$  とする。  
AH と BO の交点を  $D'$ 、BH と CO の交点を  $E'$ 、CH と AO の交点を  $F'$  としたとき、  
 $\triangle ABC$  と  $\triangle D'E'F'$  は相似である。

図にすると次のようになります。



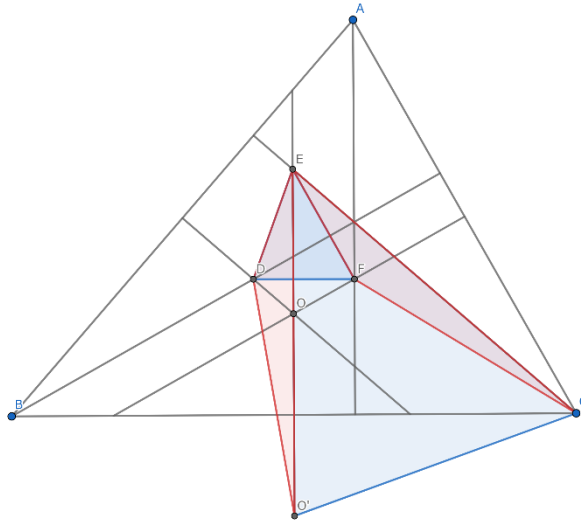
- 2.2 **系** 定理 2 と同様に、AH と CO の交点を  $G'$ 、BH と AO の交点を  $H'$ 、CH と BO の交点を  $I'$  とすると、 $\triangle ABC$  と  $\triangle G'H'I'$  は相似である。

## 3 証明の前置き

以下ではこれらを証明しますが、この二つは類似した方法で証明できます。重要なのは、補助点を取ることと、正弦定理を使うことです。

なお、以降の証明では証明の流れをわかりやすくするために、角度計算により容易に得られる事実や変形については一部説明を省略しました。また、証明は上図のような場合についてのものです。

## 4 一つ目の定理の証明



$\triangle ABC$  の外心  $O$  をとり、 $BC$  に関して  $O$  と対称な点を  $O'$  とする。このとき、 $\triangle O'EC$  は  $\triangle ABC$  と相似である。よって、 $\triangle DEF$  が  $\triangle O'EC$  と相似であること、つまり  $\triangle DO'E$  が  $\triangle FCE$  と相似であることを示せばよい ( $\because$  回転相似)。

まず、4点  $B, O', O, D$  は共円なので、

$$\angle DO'E = \angle DO'O = \angle DBO = \angle DBC - \angle OBC = \angle CAB - \angle BCA$$

さらに、

$$\angle FCE = \angle FCA - \angle ECA = \angle FAC - \angle ECA = \angle CAB - \angle BCA$$

なので、

$$\angle DO'E = \angle FCE$$

である。

また、 $\triangle O'EC$  と  $\triangle ABC$  の相似より、

$$O'E : CE = AB : BC$$

である。

最後に、正弦定理を多用して、

$$\begin{aligned} O'D : CF &= \sin \angle DBO' \frac{DB}{\sin \angle BO'D} : \frac{1}{2} \frac{CA}{\cos \angle FCA} = \sin \angle ABC \frac{\frac{1}{2} \frac{AB}{\cos \angle DBA}}{\sin \angle BCA} : \frac{1}{2} \frac{CA}{\cos \angle FAC} \\ &= \sin \angle ABC \frac{\frac{AB}{\sin \angle CAB}}{\sin \angle BCA} : \frac{CA}{\sin \angle BCA} = AB : \frac{CA}{\sin \angle ABC} \sin \angle CAB = AB : BC \end{aligned}$$

が得られるので、

$$O'E : CE = O'D : CF$$

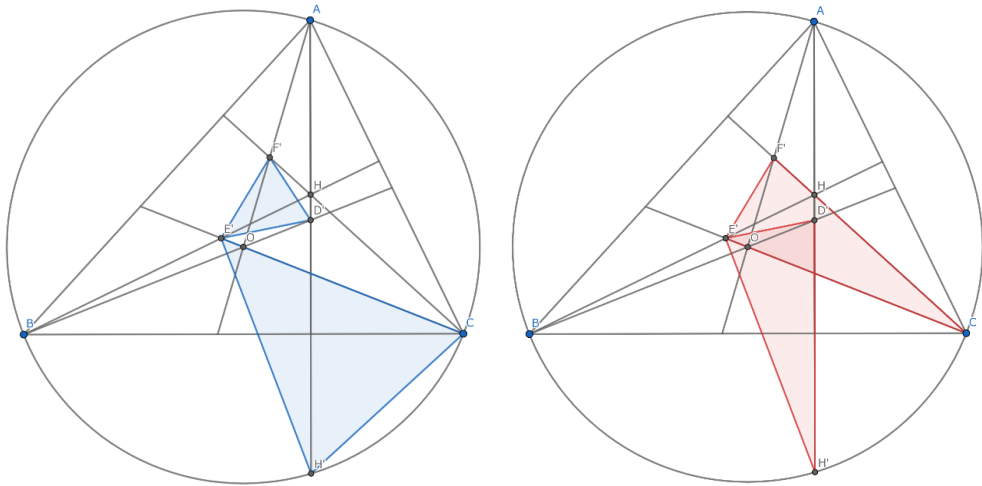
である。これと、

$$\angle DO'E = \angle FCE$$

を合わせると、 $\triangle DO'E$  が  $\triangle FCE$  と相似であることがわかる。以上より、示された。■



## 5 二つ目の定理の証明



BC に関して H と対称な点を  $H'$  とする。このとき、 $H'$  は  $\triangle ABC$  の外接円上にあり、

$$\angle E'HH' = \angle BCA = \angle BCO + \angle OCA = \angle BCO + \angle BCH' = \angle E'CH'$$

より 4 点  $E', H, C, H'$  は共円である。よって、

$$\angle H'E'C = \angle ABC, \angle E'CH' = \angle BCA$$

なので、 $\triangle H'E'C$  は  $\triangle ABC$  と相似である。よって、 $\triangle D'E'F'$  が  $\triangle H'E'C$  と相似であること、つまり  $\triangle CE'F'$  が  $\triangle H'E'D'$  と相似であることを示せばよい ( $\because$  回転相似)。

まず、4 点  $E', H, C, H'$  の共円より、

$$\angle E'CF' = \angle E'H'D'$$

である。

また、 $\triangle H'E'C$  と  $\triangle ABC$  の相似より、

$$E'C : E'H' = BC : BA$$

である。最後に、正弦定理を多用して、

$$\begin{aligned} CF' : H'D' &= \sin \angle CAF' \frac{CA}{\sin \angle AF'C} : \sin \angle D'BH' \frac{BH'}{\sin \angle H'D'B} = \cos \angle ABC \frac{CA}{\sin \angle CF'O} \\ &: \sin \angle ABC \frac{\sin \angle H'CB \frac{BC}{\sin \angle BH'C}}{\sin \angle CAB} = \cos \angle ABC \frac{CA}{\sin \angle BCA} : \sin \angle ABC \frac{\cos \angle ABC \frac{BC}{\sin \angle CAB}}{\sin \angle CAB} \\ &= \sin \angle CAB \frac{CA}{\sin \angle ABC} : \sin \angle BCA \frac{BC}{\sin \angle CAB} = BC : BA \end{aligned}$$

が得られるので、

$$E'C : E'H' = CF' : H'D'$$

である。これと、

$$\angle E'CF' = \angle E'H'D'$$

を合わせると、 $\triangle CE'F'$  と  $\triangle H'E'D'$  が相似であることがわかる。以上より、示された。■

# フラクタルについて

77 回生 内田 侑里

## はじめに

まず、フラクタルを書こうとした経緯は、数研ホームページにある分の部誌を目に通してフラクタルについての部誌が無かったというのが意外だったのと、小さいころからフラクタル図形が好きだったというのもあって、これを機に調べて書いてみました。

## フラクタル図形

まずフラクタル図形とはなにか。これは自己相似性（自身と自身の一部が相似の関係になっていること）をもつ図形のことです。と言ってもわかりにくいと思うので、何個かフラクタル図形を紹介します。

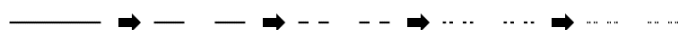
### シェルピンスキーのギャスケット



パスカルの三角形を奇数偶数で塗り分けると似たような図形になる。

これの正四面体版をシェルピンスキー四面体といい、日よけとして利用されています。

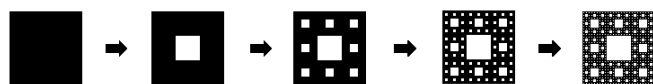
### カントール集合



線を 3 等分して真ん中を消すと言う操作を繰り返したものの。

この意味が気になる人は --> ルベーグ積分

### シェルピンスキーのカーペット



シェルピンスキーのギャスケットの正方形版 そして、カントール集合の二次元版。

これの正六面体版はメンガーのスポンジと呼ばれています。

## ピタゴラスの木



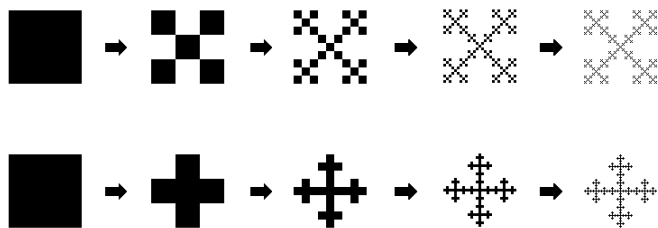
原始ピタゴラス数の木じゃないよ。

アルバート・E・ボスマンが発見 ピタゴラスじゃないよ。

最終的にははじめの縦4×横6の長方形に収まる。

ブロッコリーみたいな感じ。

## ヴィチェック 雪片 X、+



上がX、下が+で45° 傾いた関係になっています。

## 身近なフラクタル

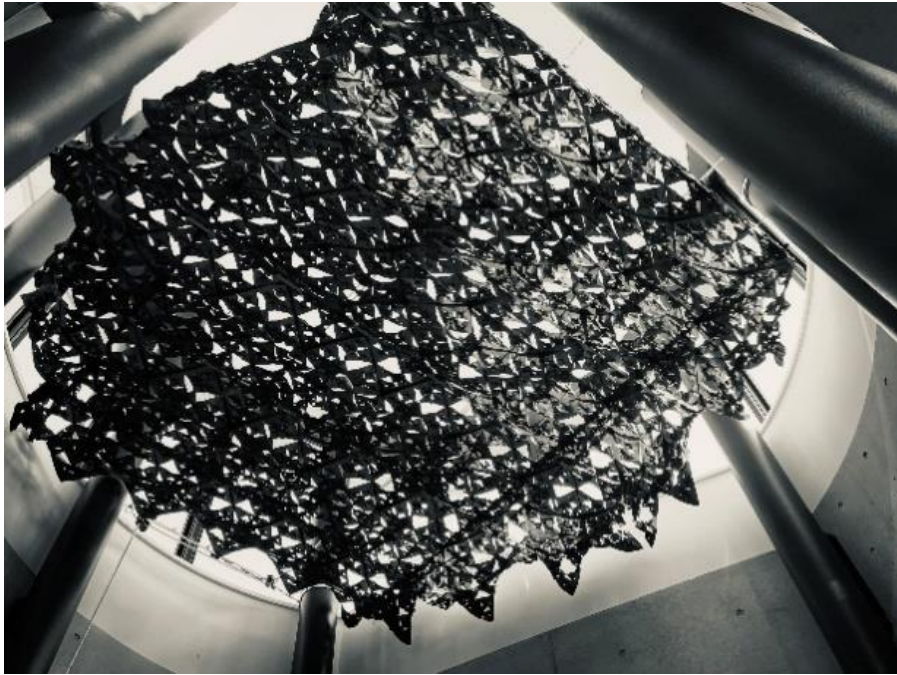
完全に自己相似性を持つものは自然界には存在しませんが、広い意味では存在します。

例えば、植物、雷、雲、肺、地形などはフラクタルで、一部を拡大した形が全体の形に類似します。また映像効果などでも使われていて、映画の背景や、MVによく見られます。

また灘校では、屋上テラスから図書館の日除けに使われているシェルピンスキーのギャスケットを覗くことができます。



左:屋上テラスの木 右:雲



図書館の日除け（シェルピンスキーのギヤスケット）

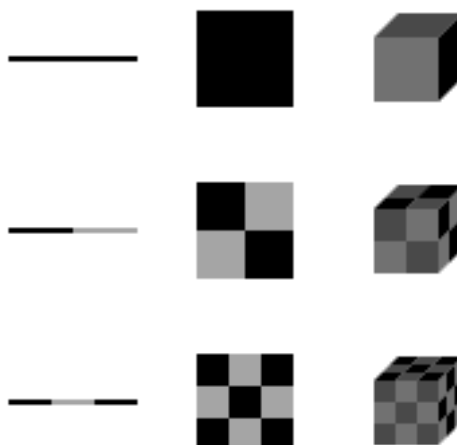
## フラクタル次元

フラクタル次元には大きく2種類の定義があり、

- 1) 相似比が  $1:a$  である時に、いわゆる『長さ』の比が  $1:b$  となる時の  $a^n = b$  となる  $n$  のこと
- 2) フラクタル図形を  $1/a$  に縮小したときに、元の図形を埋めるために必要となる図形の個数が  $b$  となる時の  $a^n = b$  となる  $n$  のこと

どちらも  $n = \log b / \log a$  と表す事ができます。

1次元、2次元、3次元をフラクタル次元の見方で見ると 2) はすんなり理解できると思います。



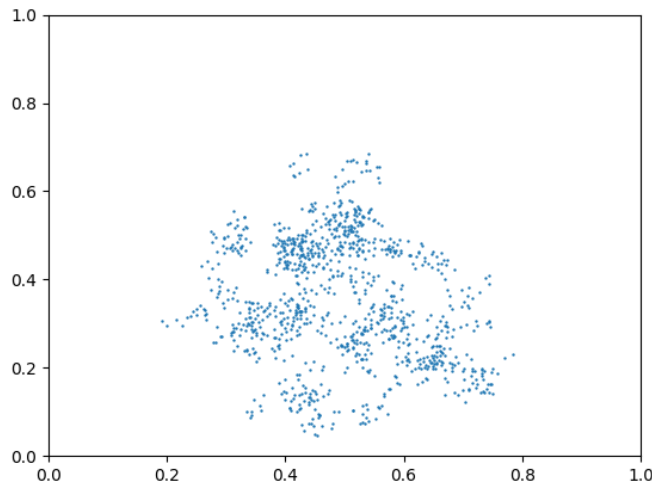
シェルピンスキーのギヤスケットのフラクタル次元は  $1/2$  に縮小したものが  $3$  つで、出来ているので  $n = \log 3 / \log 2 \cong 1.58$  となり、 $1.58$  次元となります。

有名なフラクタルのフラクタル次元をまとめた表

図形	次元(約)
点	0
カントール集合	0.63
線	1
コッホ曲線	1.26
ヴィチェック 雪片 X、+	1.46
シェルピンスキーのギャスケット	1.58
シェルピンスキーのカーペット	1.89
面	2
シェルピンスキー四面体	2
メンガーのスポンジ	2.72
立体	3

### 図形ではないフラクタル

また、逆に任意の  $a$  のとき、 $n$  の値が一定であればそれはフラクタルだということも出来ます。例えば、以下の分布がフラクタルかどうか確認する。



まず  $n \times n$  に分割し、点が存在する区域が何か所あるか調べると

$$n = 4 \text{ の時 } 8 \text{ 箇所 } n = \log 8 / \log 4 \approx 1.5$$

$$n = 8 \text{ の時 } 23 \text{ 箇所 } n = \log 23 / \log 8 \approx 1.547$$

$$n = 16 \text{ の時 } 69 \text{ 箇所 } n = \log 69 / \log 16 \approx 1.527$$

$$n = 32 \text{ の時 } 206 \text{ 箇所 } n = \log 206 / \log 32 \approx 1.537$$

$$n = 64 \text{ の時 } 502 \text{ 箇所 } n = \log 502 / \log 64 \approx 1.495$$

となり、ほぼ  $n$  が一定であるのでこの分布はほぼフラクタルということが出来る。

このように、分布もフラクタルになり得るわけです。

有名な分布としてのフラクタルは地震の大きさの分布で、すでにマグニチュードは対数なので、発生回数を対数にすると比例関係が成り立ち、フラクタルになります。



自然界はフラクタルで溢れています

これは私の家で飼育しているミジンコですが、恐らく(重要)大きさの対数と個体数の対数もおそらく比例して、フラクタルになります。

## さいごに

ここまで読んでくれてありがとうございます。

6年目にして初めて部誌を書きました。

端折って説明をしているところもあるのでそこはご了承ください。

力が至らないところが多く、スッキリとしたものは書けませんでした。友人たちのお陰でなんとか終わりそうです。

## 参考文献

- [1] 小川泰 『フラクタルとは何か』 (NEW SCIENCE AGE 39)、岩波書店、1989.
- [2] ケネス・ファルコナー 『フラクタル』 (岩波科学 ライブラリー 291)、服部久美子訳、岩波書店、2020.  
(原著: KENNETH FALCONER, FRACTALS: A VERY SHORT INTRODUCTION, OXFORD UNIVERSITY-PRESS, 2013)
- [3] 山口昌哉 『カオスとフラクタル』 (ブルーバックス B-652)、講談社、1986.

# 円(二次曲線)に内接する六角形についての 小噺

宮原尚大

## 1 今回使う定理の紹介

今回は紹介だけで，証明は読者への課題とする．なんなら図と定理の名前だけ置いとくからウィキペディアとかで調べてください←怠惰

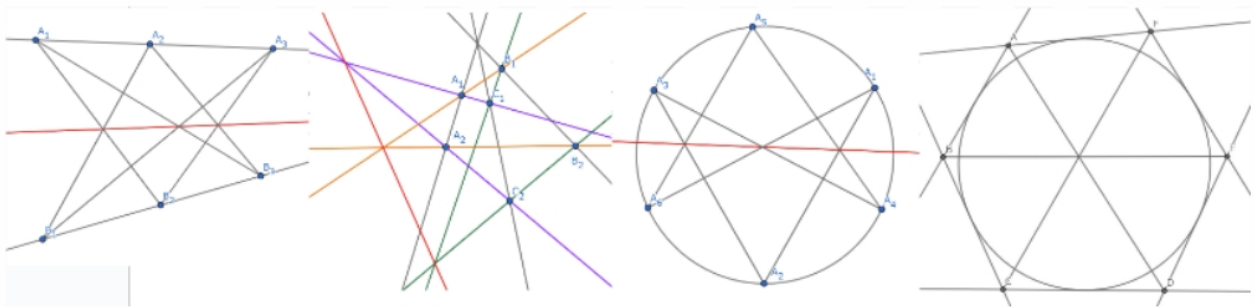
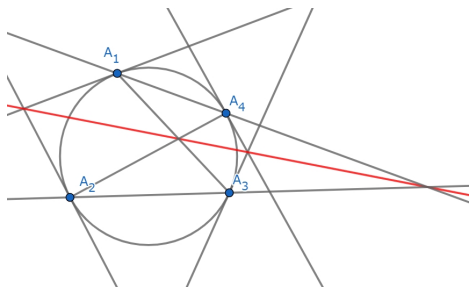


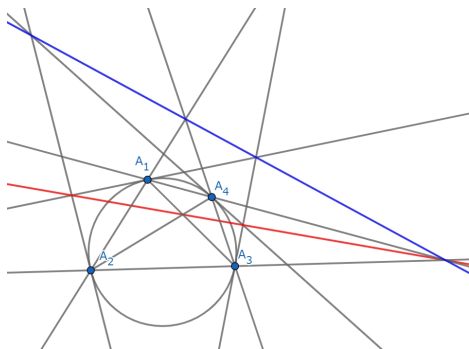
図 1: 左からパップス、デザルグ、パスカル、ブリアンシヨンの定理

パップスの定理は何種類かあるらしい．他のも同名のものがいくつかあるかもしれないが，射影幾何って書いてればそれ．  
特にデザルグの定理は今回めっちゃ使います．

## 2 円(二次曲線)に内接する四角形について



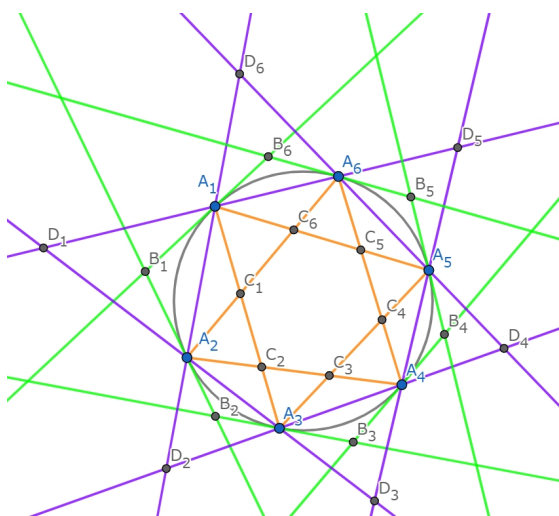
ブリアンションの定理において六角形  $ABCDEF$  の  $A$  を  $B$  に,  $D$  を  $E$  に近似するなどしたら上の画像のような共線(三点以上が一直線上に並ぶこと)が示せる.



さらにパスカルの定理で同様の近似をすれば上の共線が示せる.

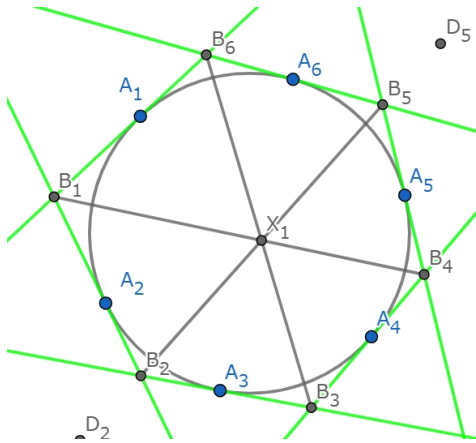
## 3 円(二次曲線)に内接する六角形について、 $X_1 \sim$

$X_7$

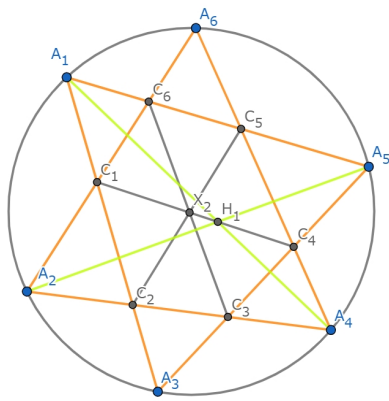


このように点の名前をとる.

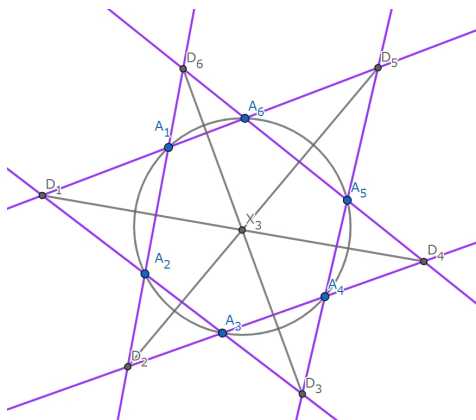




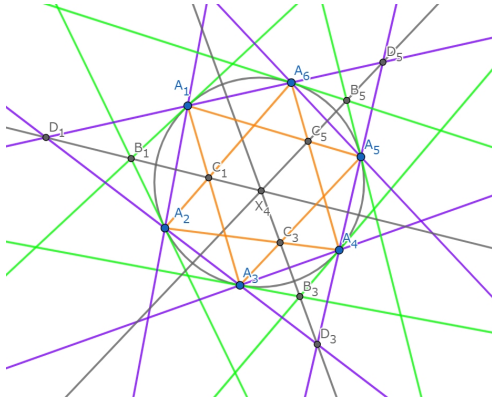
これはブリアンションの定理そのまま. この共点を  $X_1$  とする.



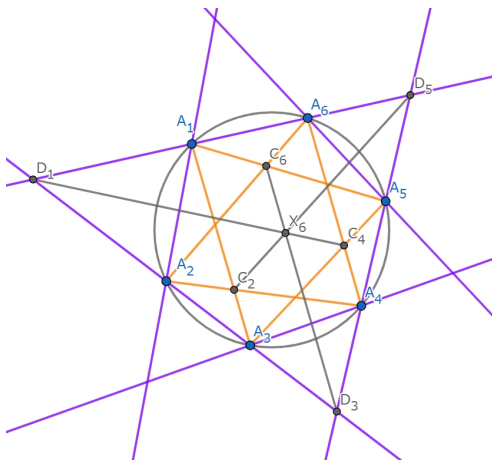
$C_2C_5$  と  $C_3C_6$  の交点を  $X_2$ ,  $A_1A_4$  と  $A_2A_5$  の交点を  $H_1$ ,  $A_1C_3$  と  $A_2C_5$  の交点を  $H_2$  とする. パスカルの定理より  $C_1, H_1, C_4$  は共線で, パップスの定理より  $C_4, H_1, H_2$  と  $C_1, H_2, X_1$  もそれぞれ共線であるため, 示された.



パスカルの定理より, 直線  $A_1A_2, A_4A_5$  の交点,  $A_2A_3, A_5A_6$  の交点,  $A_3A_4, A_6A_1$  の交点は共線. したがって三角形  $D_1D_3D_5$  と  $D_2D_4D_6$  に対してデザルグの定理の逆が使えて, よって直線  $D_1D_4, D_2D_5, D_3D_6$  は共点. この点を  $X_3$  とする.

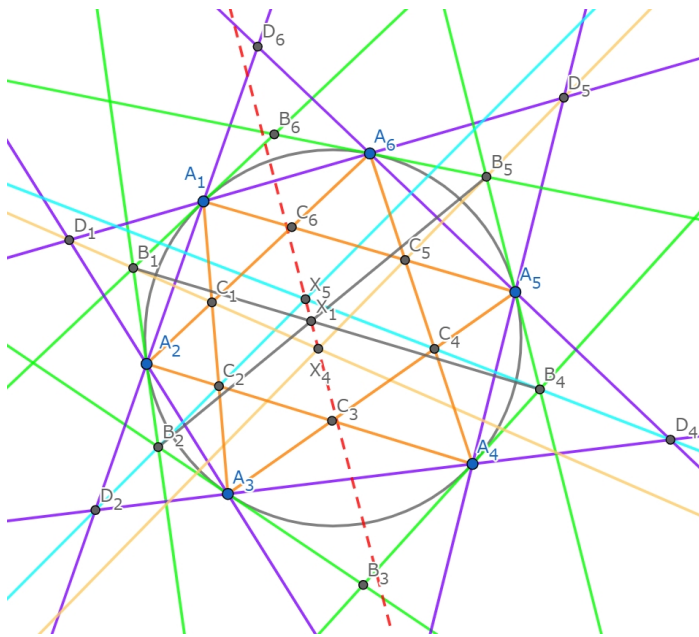


2章の事実から  $B_i, C_i, D_i$  は共線である. ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )  
 直線  $B_1C_1, B_5C_5$  の交点を  $X_4$  とし, 点  $A_2, A_5$  におけるそれぞれの接線の交点を  $H_3$  とする.  
 2章より直線  $D_1D_5, B_1B_5, A_2A_5$  は共点だから, デザルグの定理を三角形  $D_1B_1A_2$  と  $D_5B_5A_5$  に用いて,  $H_3, D_3, X_4$  の共線を示せる. また, 四角形  $A_2A_3A_4A_5$  について2章の事実を使うことで  $H_3$  は直線  $B_3C_3$  上にあることが分かるので, 示された. 同様に直線  $B_2C_2, B_4C_4, B_6C_6$  も共点だから, この点を  $X_5$  とする.

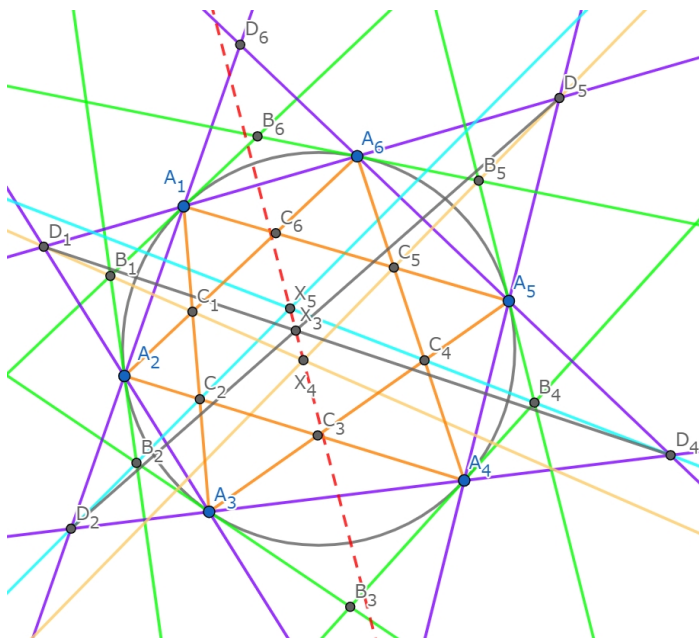


直線  $D_1C_4, D_5C_2$  の交点を  $X_6$ , 直線  $A_1A_3, A_4A_6$  の交点を  $H_4$  とする.  
 パスカルの定理より  $A_1A_3, A_6A_4$  の交点  $H_4, A_3A_2, A_4A_5$  の交点  $D_3, A_2A_6, A_5A_1$  の交点  $C_6$  は共線.  
 直線  $A_2A_6, A_3A_5$  の交点を  $H_5, A_1A_5, A_2A_4$  の交点を  $H_6, C_1C_5, C_2C_4$  の交点を  $I_7$  とする. このとき上と同様に  $H_5, C_5, X_6$  と  $H_6, C_1, X_6$  は共線とわかる.  
 $X_2$  について三角形  $C_1C_6C_5$  と  $C_4C_3C_2$  にデザルグの定理を用いて  $H_5, H_6, I_7$  の共線を示せる. よって三角形  $H_5C_4C_5$  と  $H_6C_2C_1$  にデザルグの定理を使えて,  $C_3, H_4, X_6$  の共線が示せる. 同様に直線  $D_2C_5, D_4C_1, D_6C_3$  も共点だから, この点を  $X_7$  とする.

# 4 X



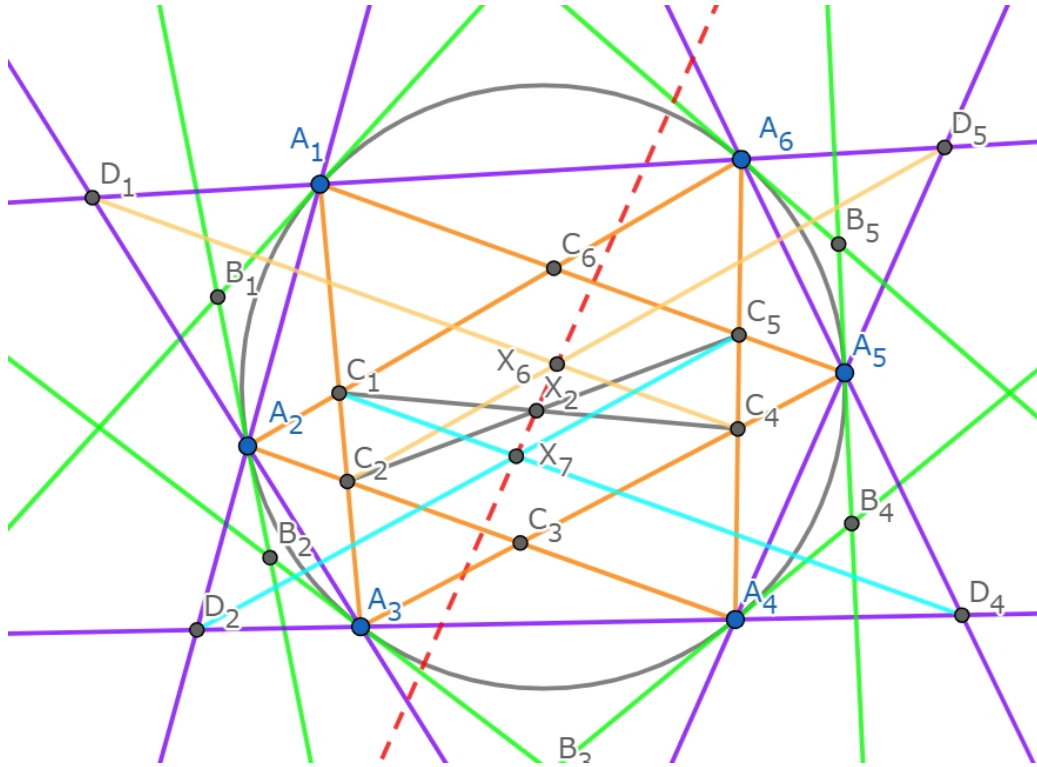
$X_4$  の共点を示す仮定で示したものと同様に直線  $B_1X_4, B_4X_5, B_2B_3, B_5B_6$  と直線  $B_2X_5, B_5X_4, B_1B_6, B_3B_4$  はそれぞれ共点. 三角形  $B_1B_5B_6$  と  $B_4B_2B_3$  にデザルグの定理を使って, 三角形  $B_1X_4B_5$  と  $B_4X_5B_2$  にデザルグの定理の逆を使うことで示せる.



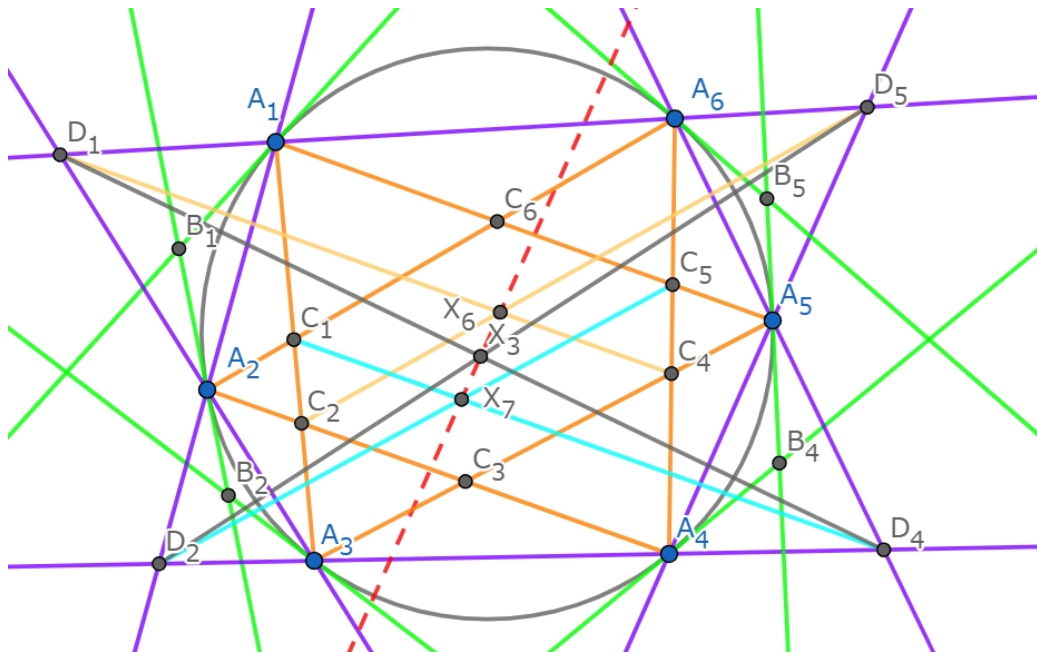
さっきの共点をそのまま使う. 四角形  $A_1A_3A_4A_6$  に 2 章の事実を使えば二つの共点と直線  $A_1A_6, A_3A_4$  の交点が共線だから, 三角形  $D_1X_4D_5$  と三角形  $D_4X_5D_2$  にデザルグの定理の逆を使うことで示せる.

つまり,  $X_1, X_3, X_4, X_5$  は共線なのだ.

さっきの  $H_6, H_5$  が再登場します (ネタバレ).  
 前示した  $H_5, I_7, H_6$  の共線から三角形  $C_1C_6C_5$  と  $C_4C_3C_2$  にデザルグの定



理の逆を使って示せる.



パスカルの定理より直線  $A_1A_6, A_4A_3$  の交点, 直線  $A_6A_2, A_3A_5$  の交点  $H_5$ , 直線  $A_2A_4, A_5A_1$  の交点  $H_6$  は共線だから三角形  $D_1X_6D_5$  と  $D_4X_7D_2$  にデザルグの定理の逆を使えて示せる.

つまり,  $X_2, X_3, X_6, X_7$  は共線なのだ.

## 5 おまけ

直線  $A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6$  が共点なら

その点を  $Y$  とおく.

直線  $C_1C_4$  が点  $H_1$  を通るので,  $Y$  と  $X_2$  は一致する.

三角形  $D_1A_1A_2$  と  $D_4A_4A_5$  にデザルグの定理の逆を使う等することで  $Y$  と  $X_3$  は一致する.

China TST 2022 Test1 Day1 P1 によると, 二つの三角形  $A_3D_3A_4, A_6D_6A_1$  それぞれの外心を結んだ線は直線  $A_1A_4, A_3A_6$  の交点を通るらしい. 今回扱うのが射影幾何ということで外接円については出してこなかったが, 一応点の名称とか違うけど図だけ挙げておくので自由に示していいよ.

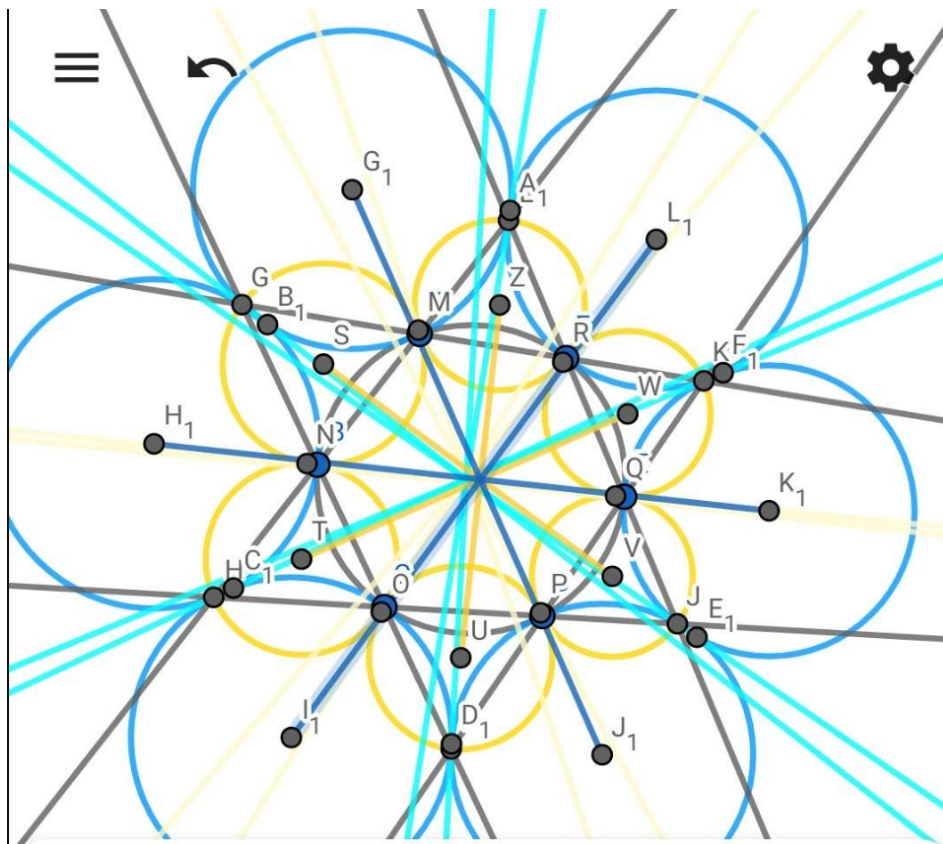


図 2: 説明がめんどくさいのでどこがどう共点かは各自 GeoGebra で書いて拡大するかボクに聞いてください

最後にこんなことをやろうと思った動機だけ書いておきます.

初めは和田杯の候補問題のつもりでした. しかも四角形  $A_1A_2A_3A_4, A_4A_5A_6A_1$  が調和四角形という極端なケースだけ考えてました. それが調和四角形じゃなくてもいいぞとなり, いろいろあることが分かりました.  $X_2$  が見つかったからは一気に進みましたね. やってくと多分いつまでも終わらないいくらでも性質が出てくるので, 「部誌の範囲でどこまでやるか」はちょっと考えました. 結局  $X_i$  たちの共線が良い感じに締めになるかなと思いましたがこれで締めさせてもらいました. それでは, Good luck!